



آنالیز عددی ۱

(رشته ریاضی)

www.ketab.ir

دکتر اسماعیل بابلیان

سرشناسه	:	بابلیان، اسماعیل، ۱۳۲۵ -
عنوان و نام پدید آور	:	آنالیز عددی ۱ / اسماعیل بابلیان.
مشخصات نشر	:	تهران: دانشگاه پیام نور، ۱۳۹۰.
مشخصات ظاهری	:	دوازده، ۳۷۵ ص.
فروست	:	دانشگاه پیام نور؛ ۱۷۹۰. گروه ریاضی؛ ۱۲۰/ق
شابک	:	7 - 833 - 387 - 964 - 978
وضعیت فهرست نویسی	:	فیپا.
یادداشت	:	چاپ قبلی: دانشگاه پیام نور، ۱۳۸۱ (۳۰۹ص).
موضوع	:	آنالیز عددی - آموزش برنامه‌ای.
موضوع	:	آنالیز عددی - راهنمای آموزشی (عالی).
شناسه افزوده	:	دانشگاه پیام نور.
رده بندی کنگره	:	۱۳۹۰ ۲۲۸۳۲/ب QA۲۹۷
رده بندی دیویی	:	۵۱۸
شماره کتابشناسی ملی	:	۲۵۲۰۷۶



دانشگاه پیام نور

آنالیز عددی ۱

مؤلف: دکتر اسماعیل بابلیان

ویراستار علمی: دکتر علی دانایی

تهیه و تولید: مدیریت تولید محتوا و تجهیزات آموزشی

لیتوگرافی، چاپ و صحافی: مرکز چاپ و انتشارات دانشگاه پیام نور

شمارگان: ۳۰۰۰ نسخه

نوبت و تاریخ چاپ: چاپ اول (تجدید حروفچینی) اسفند ۱۳۹۱

شابک: ۷ - ۸۳۳ - ۳۸۷ - ۹۶۴ - ۹۷۸

ISBN: 978 - 964 - 387 - 833 - 7

فروش این کتاب فقط از طریق نمایندگی‌های دانشگاه پیام نور مجاز می باشد و فروش

آن در سایر مراکز فروش کتاب موجب تعقیب قانونی فروشنده خواهد گردید

(کلیه حقوق نشر اعم از چاپی، الکترونیکی، تصویری، صوتی و اینترنتی برای دانشگاه پیام نور محفوظ است)

قیمت: ۷۸۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار ناشر

کتاب‌های دانشگاه پیام نور حسب مورد و با توجه به شرایط مختلف یک درس در یک یا چند رشته دانشگاهی، به صورت کتاب درسی، متن آزمایشگاهی، فرادرسی، و کمک‌درسی چاپ می‌شوند.

کتاب درسی ثمرهٔ کوشش‌های علمی صاحب اثر است که براساس نیازهای درسی دانشجویان و سرفصل‌های مصوب تهیه و پس از داوری علمی، طراحی آموزشی، و ویرایش علمی در گروه‌های علمی و آموزشی، به چاپ می‌رسد. پس از چاپ ویرایش اول اثر، با نظرخواهی‌ها و داوری علمی مجدد و با دریافت نظرهای اصلاحی و متناسب با پیشرفت علوم و فناوری، صاحب اثر در کتاب تجدیدنظر می‌کند و ویرایش جدید کتاب با اعمال ویرایش ربانی و صوری جدید چاپ می‌شود.

متن آزمایشگاهی (م) راهنمایی است که دانشجویان با استفاده از آن و کمک استاد، کارهای عملی و آزمایشگاهی را انجام می‌دهند.

کتاب‌های فرادرسی (ف) و کمک‌درسی (ک) به منظور غنی‌تر کردن منابع درسی دانشگاهی تهیه و بر روی لوح فشرده تکثیر می‌شوند و یا در وبگاه دانشگاه قرار می‌گیرند.

مدیریت تولید محتوا و تجهیزات آموزشی

فهرست مطالب

هفت

۵۵

پیشگفتار

مقدمه

۱

فصل اول. خطاها

۲

۱-۱ منابع خطا

۶

۲-۱ نمایش اعداد

۱۲

۳-۱ بسط اعداد در مبنای ۲

۲۲

۴-۱ ارقام بامعنا

۲۳

۵-۱ انتخاب تقریبی از یک عدد معلوم

۲۷

۶-۱ انواع خطا

۳۵

۷-۱ ارقام بامعنا درست یک تقریب

۴۴

۸-۱ تولید و انتشار خطا

۵۶

۹-۱ خطای محاسبه توابع

۶۲

۱۰-۱ تمرین‌های تستی

۶۵

فصل دوم. حل معادلات غیرخطی

۶۷

۱-۲ یک مسئله کاربردی

۶۹

۲-۲ تعیین تعداد و محل تقریبی ریشه‌ها

۷۸

۳-۲ تعیین ریشه‌ها با دقت مطلوب

۸۰

۴-۲ روش دوبخشی (یا روش تصنیف)

۸۸

۵-۲ روش نابه‌جایی

۹۳

۶-۲ روش تکرار ساده (یا نقطه ثابت یا تکرار تابعی)

۱۰۹

۷-۲ مرتبه همگرایی یک دنباله

۱۱۳

۸-۲ روش نیوتن - رافسون

۱۲۲

۹-۲ تعیین ریشه‌های تکراری

۱۳۱

۱۰-۲ روش وتری (یا خط قاطع)

۱۳۴

۱۱-۲ حل دستگاه معادلات غیرخطی

۱۳۹

۱۲-۲ تمرین‌های تستی

۱۴۲	۱۳-۲ مسائل تکمیلی
۱۴۵	فصل سوم. حل معادلات چندجمله‌ای
۱۴۶	۱-۳ یک مسئله کاربردی
۱۴۸	۲-۳ روابط بین ریشه‌ها و ضرایب یک معادله چندجمله‌ای
۱۵۴	۳-۳ تعیین حدود ریشه‌های $P(z) = 0$
۱۶۰	۴-۳ محاسبه $P(z)$ و $P'(z)$ به ازای $z = a$
۱۶۴	۵-۳ تعیین ریشه‌های حقیقی $P(z) = 0$ با دقت مطلوب
۱۶۷	فصل چهارم. درون‌یابی
۱۶۸	۱-۴ مفهوم درون‌یابی
۱۷۰	۲-۴ چندجمله‌ای‌های لاگرانژ
۱۷۷	۳-۴ روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن
۱۸۶	۴-۴ خطای چندجمله‌ای درون‌یابی
۱۹۵	۵-۴ مینیمم کردن خطای چندجمله‌ای درون‌یابی
۲۰۴	۶-۴ تفاضلات متناهی
۲۱۰	۷-۴ کاربرد تفاضلات متناهی
۲۱۵	۸-۴ فرمول چندجمله‌ای درون‌یابی بر حسب تفاضلات پیشرو
۲۲۴	۹-۴ فرمول چندجمله‌ای درون‌یابی بر حسب تفاضلات پسرو
۲۲۶	۱۰-۴ درون‌یابی معکوس
۲۳۰	۱۱-۴ برازش منحنی
۲۳۴	۱۲-۴ تمرین‌های تستی
۲۳۵	۱۳-۴ مسائل تکمیلی
۲۳۷	فصل پنجم. مشتگیری و انتگرال‌گیری عددی
۲۳۹	۱-۵ مشتگیری عددی
۲۵۰	۲-۵ انتگرال‌گیری عددی
۲۶۴	۳-۵ قاعده سیمسون
۲۷۵	۴-۵ قاعده نقطه میانی
۲۸۵	۵-۵ قاعده رامبرگ
۲۹۴	۶-۵ قاعده‌های دقیق‌تر
۳۰۷	۷-۵ تمرین‌های تستی
۳۰۸	۸-۵ مسائل تکمیلی
۳۱۱	فصل ششم. حل عددی معادلات دیفرانسیل
۳۱۳	۱-۶ روش بسط تیلر
۳۲۰	۲-۶ روش‌های رونگه - کوتا
۳۲۳	۳-۶ روش‌های چندگامی
۳۲۹	حل تمرین‌های منتخب
۳۷۱	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۳۷۵	منابع

پیشگفتار

در دروس ریاضی، نظیر ریاضیات عمومی، مبانی ریاضیات، معادلات دیفرانسیل، آنالیز و ... مسائلی چون تعیین ریشه‌های یک معادله، محاسبه مقدار یک انتگرال معین و به‌دست آوردن جواب کلی یک معادله دیفرانسیل را دیده‌اید. در این دروس، طی چند قضیه وجودی ثابت می‌شود که مثلاً یک معادله چند ریشه دارد یا انتگرال تابع معلومی موجود است یا برای دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل، طی شرایطی، می‌توان جواب به‌دست آورد. به عبارت دیگر، کار درس‌های مذکور نظری است و بیشتر به تعیین مدل ریاضی برای مسائل و بحث در وجود، یکتایی و یا عدم وجود جواب برای آن‌ها خلاصه می‌شود، و کمتر به تعیین مقدار ریشه(ها)، مقدار انتگرال، و یا مقدار جواب یک معادله دیفرانسیل در نقطه معلوم پرداخته می‌شود. برای به‌دست آوردن جواب‌های عددی مسائل مذکور باید روش‌هایی طراحی و اجرا شوند. لذا، آنالیز عددی به توصیف، تحلیل و طراحی روش‌هایی می‌پردازد که جواب‌های عددی مسائل ریاضی را به‌دست می‌دهند. در درس آنالیز عددی بر آنیم تا آنچه را که وجود آن در آنالیز ریاضی، نظریه معادلات و ... به اثبات رسیده است، با به‌کارگیری روش‌های عددی مناسب پیدا و ارائه کنیم. بدیهی است که برای تعیین جواب یا جواب‌های یک مسئله باید راه‌حل یا روش (یا الگوریتم) رسیدن به جواب را بدانیم یا طراحی کنیم. از آنجا که روش‌های عددی شامل مراحل زیاد و هر مرحله، احیاناً، متضمن انجام عملیات فراوان است لزوم بهره‌گیری از یک ابزار محاسباتی، نظیر ماشین حساب یا کامپیوتر اجتناب‌ناپذیر است.

با پیدایش کامپیوتر و به کارگیری آن در محاسبات عددی موضوع آنالیز عددی از اهمیت بیشتری برخوردار شد و تحرک قابل توجهی یافت. اما نباید تصور کرد که آنالیز عددی مبحث تازه‌ای است که همزمان با پیشرفت کامپیوتر پدید آمده است. در واقع، آنالیز عددی با تهیه نتایج به صورت اعداد مرتبط است که بی‌شک توسط بشر اولیه نیز به کار می‌رفته است. در این زمینه بابلی‌ها و مصریان قدیم به خاطر مهارت‌های عددی که داشتند، پیشتازند. لوحی بابلی، که تاریخ آن به تقریباً دو هزار سال قبل از میلاد برمی‌گردد، پیدا شده است که مجذور اعداد صحیح از یک تا شصت را به دست می‌دهد. لوح دیگری مؤید ثبت خسوف و کسوف‌ها از حدود سال ۷۵۰ قبل از میلاد است. مصریان کسر را مورد توجه قرار دادند و درباره بسط یک کسر، به صورت مجموع کسرهایی که صورت آن‌ها واحد باشد، روش‌هایی ارائه کردند که در نوع خود بسیار جالب‌اند. [۱] مصریان روش نابجایی را نیز برای تعیین ریشه‌های یک معادله غیرخطی ابداع کردند. ریاضیدانان یونان قدیم نیز در این رشته فعال بودند. ارشمیدس، در حدود سال ۲۲۰ قبل از میلاد، کران‌های زیر را برای عدد π ارائه کرد:

$$2\frac{1}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

روند تکراری

$$X_{n+1} = \frac{1}{2} \left(X_n + \frac{a}{X_n} \right)$$

که در آن $a > 0$ ، برای محاسبه جذر تقریبی a ، که معمولاً به نیوتن نسبت داده می‌شود، در واقع حدود صد سال قبل از میلاد توسط هرون مورد استفاده قرار گرفت. فیثاغورسیان محاسبه سری‌ها را مورد توجه قرار دادند و جدول‌های مثلثاتی قبل از قرن دهم تنظیم شد.

با توسعه سریع دانش ریاضی و انقلاب علمی در غرب، آنالیز عددی نیز پیشرفت کرد. این پیشرفت مرهون تلاش و توجه دانشمندانی چون نیوتن، اویلر، لاگرانژ، گاوس و بسل بود که مبین علاقه همه‌جانبه به موضوع آنالیز عددی است. در درس مبانی کامپیوتر با تاریخچه محاسبات و اختراعات افرادی چون نپر، پاسکال و لایبنتز، که همه در جهت آسان کردن محاسبات بود، آشنا شدید [۱۱]. تدارک ماشین‌های محاسب در کارهای عددی انقلابی به وجود آورد که با پیدایش کامپیوتر الکترونیک تشدید شد. با

به‌کارگیری کامپیوتر، محاسبات عددی و تحلیل داده‌هایی که تا چند دهه قبل حتی تصور انجام آن‌ها در طول عمر یک انسان هم نمی‌رفت به کاری عادی و روزمره تبدیل شد. ضمناً، روش‌های عددی کارآیی که سال‌ها از ابداع آن‌ها می‌گذشت، اما به خاطر بستگی آن‌ها به اعداد اصم (گنگ) و نیاز به ثبت ضرایب عددی زیاد، کمتر به‌کار گرفته می‌شدند، مانند روش انتگرال‌گیری گاوس، با ظهور کامپیوتر متداول شد و گسترش یافت. با وجود این، باید توجه داشت که درس آنالیز عددی را نباید با برنامه‌نویسی و پردازش اطلاعات یکی گرفت. اما کسانی که با طراحی و به‌کارگیری الگوریتم‌های عددی سروکار دارند باید در مورد به‌کار گرفتن بهینه کامپیوتر در انجام محاسبات و انتخاب روش مناسب، اطلاعات و تجربه کافی داشته باشند. به همین دلیل است که گفته می‌شود:

آنالیز عددی علم است و محاسبات عددی هنر

در فصول مختلف این کتاب با روش‌های متنوعی برای حل یک مسئله، مثلاً تعیین تقریبی از ریشه معادله $f(x) = 0$ آشنا خواهید شد. این روش‌ها با استفاده از شهود ریاضی، آنالیز ریاضی و قضایای آن حاصل می‌شوند، و تقریبی از جواب مسئله مورد نظر را به‌دست می‌دهند. باز هم به کمک آنالیز ریاضی اکثراً کران بالایی برای خطای جواب تقریبی قابل محاسبه است. (این‌ها جنبه‌های علمی آنالیز عددی را نشان می‌دهند.)

اما، برای تعیین جواب یک مسئله خاص کدام روش را باید به‌کار برد؟ این موضوع به دید، بینش علمی و تجربه متخصص آنالیز عددی بستگی دارد، که در طول زمان و با ممارست حاصل می‌شود. (این‌ها جنبه‌های هنری آنالیز عددی هستند.)

مقدمه

کتاب حاضر پس از دو بار چاپ آزمایشی، با توجه به نظر اساتیدی که آن را تدریس و دانشجویانی که آن را مطالعه کردند بازنگری و تدوین شده است. این کتاب شامل ۶ فصل است که خلاصه هر فصل در اینجا آمده است.

فصل اول: خطاها

در این فصل ضمن توجه به منابع خطا و به خصوص ذخیره اعداد در ماشین‌های محاسب که توأم با خطاست، انواع خطاها و تولید و انتشار آن‌ها را که در انجام عملیات روی اعداد تقریبی پیش می‌آیند مورد بررسی قرار می‌دهیم و توصیه‌های لازم را ارائه می‌کنیم.

فصل دوم: حل عددی معادلات غیرخطی

در این فصل ابتدا به تعیین تعداد و حدود ریشه‌های حقیقی معادله $f(x)=0$ می‌پردازیم و بعد روش‌های گوناگون برای محاسبه ریشه یا ریشه‌های این معادله را، با دقت مطلوب، مورد بررسی قرار می‌دهیم و روش‌های متفاوت را از نظر همگرایی و کارایی با هم مقایسه می‌کنیم.

فصل سوم: حل عددی معادلات چندجمله‌ای

تعیین ریشه‌های یک معادله چندجمله‌ای به صورت $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 = 0$ از دیرباز مورد توجه بوده است. در این فصل روش‌های خاص این معادلات را برای تعیین حدود و تعداد ریشه‌ها و محاسبه ریشه‌های حقیقی آن مطالعه می‌کنیم.

فصل چهارم: درونیابی

این فصل با تشریح درونیابی و برون‌یابی شروع و روش‌های مختلفی برای تعیین چندجمله‌ای درونیاب ارائه می‌شود. کاربردهای درونیابی در قسمت‌های مختلف این فصل نشان داده خواهد شد و با مثال‌های متنوع کارایی روش‌های متفاوت مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

فصل پنجم: مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری عددی

این فصل به مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری عددی اختصاص دارد و در آن روش‌های تعیین مشتق یک تابع جدولی مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین روش‌های تعیین مقادیر تقریبی انتگرال معین توابع جدولی یا توابعی که صابطه آن‌ها معلوم است، توصیف خواهد شد و خطای هر روش به دست خواهد آمد. در پایان این فصل دو روش کلی، یعنی روش‌های نیوتن - کوتز و گاوس، برای تعیین تقریبی از یک انتگرال معین بررسی خواهد شد.

فصل ششم: حل عددی معادلات دیفرانسیل

در این فصل به بررسی حل عددی معادلات دیفرانسیل مرتبه اول با مقدار اولیه می‌پردازیم و کاربرد روش‌های بسط تیلر، درونیابی و انتگرال‌گیری را در به دست آوردن فرمول‌های مربوط به تعیین مقادیر تقریبی جواب معادلات دیفرانسیل ارائه می‌کنیم.

در پایان مراجعی که مطالب کتاب از آن‌ها گرفته شده است، و یا می‌توان در مورد هر مطلب اطلاعات بیشتری به کمک آن‌ها کسب کرد، آمده است. ضمناً واژه‌نامه‌ای جهت اطلاع دانشجویان تهیه شده است. در این واژه‌نامه اکثر واژه‌های تدوین شده توسط انجمن ریاضی ایران و مرکز نشر دانشگاهی به کار رفته است [۱۵].

در هر فصل مطالبی که در بخش‌های ستاره‌دار عنوان شده‌اند الزاماً مطالب مشکل نیستند ولی مدرس می‌تواند در تدریس اولیه کتاب از آن‌ها بگذرد (بدون اینکه پیوستگی مطالب برهم بخورد). اما این مطالب معمولاً در امتحانات کارشناسی‌ارشد مطرح می‌شوند و مطالعه آن‌ها به افرادی که قصد ادامه تحصیل در این رشته را دارند توصیه می‌شود. ضمناً در آخر هر فصل تست‌های مربوط به امتحانات مختلف و مسائل تکمیلی، که بیشتر مسائل تشریحی کنکورهای کارشناسی‌ارشد هستند، اضافه شده است. در آخر کتاب حل بعضی تمرینات آخر هر بخش را مشاهده می‌کنید. همان‌گونه که ملاحظه خواهید کرد، به دلیل طولانی بودن مراحل به دست آوردن جواب بعضی تمرینات، جواب اکثر آن‌ها به اختصار داده شده است (اکثراً، چند تکرار اولیه و بعد جواب تقریبی نهایی ارائه شده است). البته حسن این کار در این است که دانشجویان را ترغیب می‌کند که جواب‌های تقریبی را خود نیز محاسبه و با جواب نهایی داده شده مقایسه کنند.

اسماعیل بابلیان

بهمن ۷۲