



نام کتاب: ریاضی ۳ (آموزش)
ناشر: خیلی سبز
مؤلف: علی بیطرفان
ویرایش و نظارت علمی: سروش موثینی
ویراستار: منصوره شاعری
حروفچینی و صفحه‌آرایی: سودابه خسروی
رسم شکل: افسانه محسنی کیپر
گرافیک: شگون شریفی
طراح جلد: حسین پاشازاده
لیتوگرافی: خاورمیانه
چاپ و صحافی: آریاک
نوبت چاپ: اول - ۹۲
تیراژ: ۵۰۰۰ جلد
قیمت: ۱۴۲۰۰ تومان
شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۶۶۷۶-۳۲-۶
تلفن مرکز پخش: ۵-۶۶۴۶۳۲۳۴ (۰۲۱)
سندوق پستی: ۸۱۷۷ - ۱۴۱۵۵
Site: www.kheilisabz.com
SMS : 10006120943628

سرشناسه: بیطرفان، علی.
عنوان و نام پدیدآور: ریاضی ۳ (آموزش) / مؤلف: علی بیطرفان.
مشخصات نشر: تهران، خیلی سبز، ۱۳۹۲.
مشخصات ظاهری: ۲۳۸ص، مصور، جدول، نمودار. ۲۲×۲۹ س م
شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۶۶۷۶-۳۲-۶؛ ریا: ۱۴۲۰۰۰
وضعیت فهرست‌نویسی: فیا
موضوع: ریاضیات -- مسایل، تمرین‌ها و غیره (متوسطه)
موضوع: ریاضیات -- آزمون‌ها و تمرین‌ها (متوسطه)
موضوع: ریاضیات -- راهنمای آموزشی (متوسطه)
رده‌بندی کنگره: ۸۸۳۱۳۹۲/۹۵۶/۲۶/۶۰۰/۲۶
رده‌بندی دیویی: ۳۷۳/۲۳۸۰۷۶
شماره کتابشناسی ملی: ۳۱۱۰۰۳۶

کلیه حقوق این اثر برای ناشر محفوظ است و هیچ شخص حقیقی یا حقوقی حق چاپ و برداشت تمام یا قسمتی از اثر را به صورت چاپ، فتوکپی، جزوه و حتی دست‌نویس ندارد و متخلفین به موجب بند ۵ از ماده‌ی ۲ قانون حمایت از ناشرین تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

راستی تا یادم نرفته اگر در مورد این کتاب سؤال، پیشنهاد و یا انتقادی دارید فوشمال می‌شویم آن‌ها را به ما هم بگویید. 📧



و یا از طریق سایت ما



یا از طریق



از طریق

* این مقدمه رمان هم شخصی بسااا معنی با این که کتاب رو به جوهرم تقدیم کردم، اما بسیر به خاطر دکتربودن اس کار رو کردم و اینه سنا جده‌دی محری که احتمالاً هدف اولتون دکتري، دندان به دارو هسسن، خویش دلسان اس قدیمه، حالی از لطف بسااا

دکی بود، یکی نبود به روزی زیر هسسن کسب گنود، اف اس سگم با بدجوری درد گرفت طوری که نمی‌توانستم از حی بود و ر حی سودا ما هم با حالی راز و احوالی تراز، لنگون لنگون رفتیم بیس به اف دکترو تو اور حائس، افای دکترو هم سلام و احوالبرسی کردن و گفتن حیرت نیست سرم، افای پرات فسکن می‌نویسم خوب بیس، دسسن درد نکنه، سوزن ردیم به که ارود سدیم، چه دکترو خوبی!

اما چند ساعت بعد که ابر فسکن رفت، دردد باز شروع شد و این بار بدتر از قبل، ما هم دوباره رفیم بیس به دکترو دکنه و اسنویه با اس که می‌دهد حالمون خیلی بد و بدجوری داره درد می‌گیره، بار فسکن پوست که ارود سسره دست اسنویه درد نکنه، بار به که ارود و قرار گرفتیم!

حرفه‌ها هفت ساعت شد و به باز دکنه درده اومد سراقمون، ما هم برای سوزن بار ما هزار ساجس و هزار تاله خودمونیم رسوخ می‌کنیم دکترو و کسبه افای دکترو، ما صبح تا حالا حس بی‌دستی داریم، دسسون به افای رو نویسم به که اسکی بکن ... چه اسنویه صلاح دس باز فسکن بچونم گن! دسب اسنویه درد کنه، فسکن حساس حر سسرو سوزن ... فسکن و ویدا ... سر و پیچما ...

حرفه‌ها این سب رو با درد صبح کردم و صبح که دکنه اوصامون حسنی حراب شد و دسبه فکسه حده، - جوهرمون که تو به سپر دکنه بود، موضوع رو در میون گذاشیم و رفیم بیس به دکترو، این افای دکترو هم می‌خواست فسکن بنویسه که طلق سفارش جوهرمون، رنگ ردیم به نحی و کوسی رو دادیم به دکترو! جوهرمون هم شروع کرد به دکترو گفت چی کار کنه حی که نگذا دکنه هم حی می‌گفت به جانوه دکترو این جراحی که بسااا می‌کنن بسااا وئی حالا می‌نه خاطر حرفه‌ها به سنا سینه درد سبوکرافی و سی‌سی‌سکن و ... جسمتون روزی نه سینه، به محض اس که جواب سونو و اینا اومد، دکترو دستاچه شد و گفت همس حالا سریع‌تر برین فلان بیمارستان، ما هم سریع رفیم فلان بیمارستان و قا به لیم ساعت کسب که ما رو بردن اتاق عمل!

... بعضی فیم‌بیمه خراب رو به خوب بوده‌ایم و که چند ساعت درجری می‌رسیده بیمارستان، باید که افان به کتاب بورس رانجی 3 حی خوب ندانستن! وقتی خوب شده و از جوهرم برسیده که سنا حدخوری فیم‌بیمه من حده، گفت از خدا و طرار حرفه‌دس فیم‌بیمه حسنی حاله ده: منم بدترین مریض رو در نظر گرفتم و ارماس مریضه به اومارو از دکترو خواستم! این موقع با خودم گفتم یعنی او! حیدرت دکترو که خود من و طرار زانرفسه و حال حرفه و - ال‌تان رشیم رو (1) می‌دسن و او حرفه و تاله کردیم رو می‌سسن، فیم‌بیمه حاله خرابه و حبیبی رسکن فقط فسکن می‌دادن! "دسسون درد نکنه و افه! خدا اس فسکن رو حفظ کنه سنااا و غیره معنی از اس دکترو حی می‌نویسن"

طیبیان راز تالسه برانسد

به جای این فسکن‌ها کمی هم

مرا سوزی سی‌سی‌ایمکن بخویند!

سرا از دست انسان واره‌ها

مرا سوزی سی‌سی‌ایمکن بخویند!

حالا سناجده‌دی که دکتربسان فکر اول و آخر بده، می‌کنم که بی‌خویش دکترو سس فربس دسسون به وقت از اس دکترو سسرها!

با عرض پوزش از طیبیان آئنده، ادامه‌ی صحبت‌ها در مقدمه‌ی مؤلف!

مقدمه‌ی ناشر

همه‌ی شما را توصیه می‌کنم به خواندن ریاضی وقتی که سال سوم هستید؛ چون وقتی که رفتید پیش دیگه عاشق شدن و نارکشیدن فایده نداره، نداره!

به خدا راست می‌گم! آن قدر درس و کار می‌ریزه سرتون که داغون داغون می‌شید.

باور نمی‌کنید ...

باور کنید.

پس همین الان به عمو قول بدید که خوب خوب ریاضی پایه و حتی پیش رو تو سال سوم استاد کنید این براتون بهتره، کلی از بقیه جلو می‌افتید! البته اگه بقیه این مقدمه رو نخونده باشن که بعیده ... D:

ممنون از آقای بیطرفان عزیز به خاطر کتاب‌ها و کارهای خوبش.

مقدمه‌ی مؤلف

هر کاری مسئولیت‌های خاص خودش رو داره. مثلاً یه راننده اتوبوس باید همیشه حواسش باشه که چون سی‌چل نفر آدم دست اونه با یه مهندس باید بدونه اگه تو ساختن یه پل دقت نکنه چه اتفاقی بدی می‌تونه بیفته. دکتری هم مسئولیت زیادی رو دوش آدم میندازه.

«گفته بودی که طبیب دل بیمار منی پس طبیب دل من باش که بیمار توام»

... مسئولیت کمی نیست؛ درسته که مرگ دست خداست ولی دکترها هم استعداد بالقودی زیادی واسه فائل بودن دارن! یه دکتر خوب نمی‌تونه به کارش به عنوان یه پیرایش (!) یا منبع درآمد کلان نگاه کنه و همیشه باید علمش رو به‌روز کنه و واسه درمان مریضاش بی‌خیال و سهل‌انگار نباشه. قطعاً نمی‌تونه خیلی از مریضیا رو درمان کنه ولی مهم اینه که مت یه راننده اتوبوس ناشی، گیج و حواس‌پرت نباشه!

«علاج درد مشتاقان طبیب عام نتواند مگر لیلی کند درمان غم مجنون شیدا را»

... به همس حاضره که دکترها بیشتر از اون‌که قاتل بالقودی باشن (این فقط یه مزاحه)، زندگی‌بخش هستند اون هم به طور بالفعل! بزرگ‌ترین لذت دکتری همینکه سلامتی و زندگی رو به خیلی‌ها برگردونی.

«منشب شب مهتابه، حبیبم رو می‌خوام حبیبم اگر خوابه، طبیبم رو می‌خوام»

پس قبل از این‌که تو این یکی دو سال مدام به رشته‌های پزشکی و مخلفاتش فکر کنی، اول به سه تا چیز فکر کنی:

- ۱- روحیه شو دارین؟ نرین دوتا جنازه ببینین پس بیفتین!
 - ۲- متوجه مسئولیت زیاد این کار هستین؟ پلی‌استیشن بازی نمی‌کنین‌ها!
 - ۳- می‌تونین وجدان کاری داشته باشین و زیرمیزی و رومیزی و ... ؟ هان؟!
- وقتی به این چیزا فکر کنی، می‌بینی که قبول شدن تو رشته‌ی پزشکی تازه آسون‌ترین قسمت ورود به این رویاست! وقتی این خوان رستم رو رد کنی، تازه هفت خول رستم شروع می‌شه!

«شبا که ما می‌خوابیم آقا دکتربه بیداره»

«نشسته توی اورجانیس فک نکنی سکماره»

امیدوارم با این حرفام نظر خیلی‌ها رو در مورد رشته‌ی پزشکی عوض کرده باشم تا این دو سال باقی‌مونده تا کنکور رو به رشته‌ای که می‌تونن توش به یه جایی برسن فکر کنن! تصور خیلی‌ها از دکتری، فقط لقب «دکتر» و کلاس کاری و پول و این جور چیزاست. همین آدمان که وقتی دکتر میشن، شان این کار شریف و مقدس رو زیر سؤال می‌برن. در حالی که اگه این آدم‌ها سراف خیلی از رشته‌های دیگه برن، می‌تونن موفق باشن.

و البته امیدوارم اونایی که واقعا می‌خوان یه دکتر خوب بشن، عزممون رو واسه این کار بیشتر کنن تا با تلاش بیشتر تو کنکور قبول بشن و مجال خودنمایی به دکترنماهای آینده رو ندن! خب پس این دسته از دوستان، بشین اسمال این کتاب رو خوب بخونن تا این‌شالا... ریاضی‌شون قوی بشه و ...!

توی این کتاب:

سعی شده کتاب درسی به طور کامل پوشش داده بشه و حتی به مطلب آموزشی، مثال یا تمرین از قلم نیفته. تست‌های کنکور تجربی بررسی شده و سعی بر این بوده که تمام ایده‌هاش مطرح بشه؛ هم کنکور سراسری هم کنکور خارج از کشور. البته نخواستیم به شکلی ناگهانی با کنکور دانشگاه آزاد وداع کنیم و فعلاً تست‌هایی از این کنکور که در راستای کنکور سراسری بودن هم اومده.

هر فصل رو به سه قسمت تقسیم کردیم: کتاب، کنکور، امتحان. پاسخ‌های تشریحی رو هم گذاشتیم آخر هر فصل. قسمت اول هر فصل (کتاب درسی)، مهم‌ترین قسمت اونه و بیشترین حجم رو هم به خودش اختصاص داده. تو این قسمت مطالب اصلی رو با حوصله آموزش دادیم و چیزهای خارج از کتاب رو مطرح نکردیم. مثال کافی آوردیم و تیکه به تیکه تمرین تشریحی دادیم. هم تمرین آسون هم تمرین ناآسون! اما سؤالای سخت رو تو این قسمت ندادیم و بردیمشون تو قسمت دوم.

قسمت دوم هر فصل (کنکور)، آموزش‌های لازم واسه کنکور رو مطرح می‌کنه که به طور مستقیم تو کتاب درسی نیست اما بر پایه‌ی کتاب درسیه! تست‌های چهارگزینه‌ای این قسمت مال کنکور هستن اما سؤال‌های تشریحیش نه. حواستون باشه که بعضی از سؤالای تشریحی این قسمت به کمی هم از کنکور سخت‌تر هستن. فقط واسه این‌که دستتون سفت بشه!

قسمت سوم هر فصل (امتحان نهایی)، سؤالای چند سال اخیر امتحان نهایی رو آورده. امیدوارم با خوندن این کتاب، چرایی خوبی تو ریاضی یاد بگیرین. اگه بدی یا خوبی‌ای هم از ما و این کتاب دیدین، لازم نیست حلال کنین (!)، فقط محبت کنین از طریق سایت یا واحد ویرایش خیلی سبز، حرفاتون رو به گوشم برسونین.

اما ...

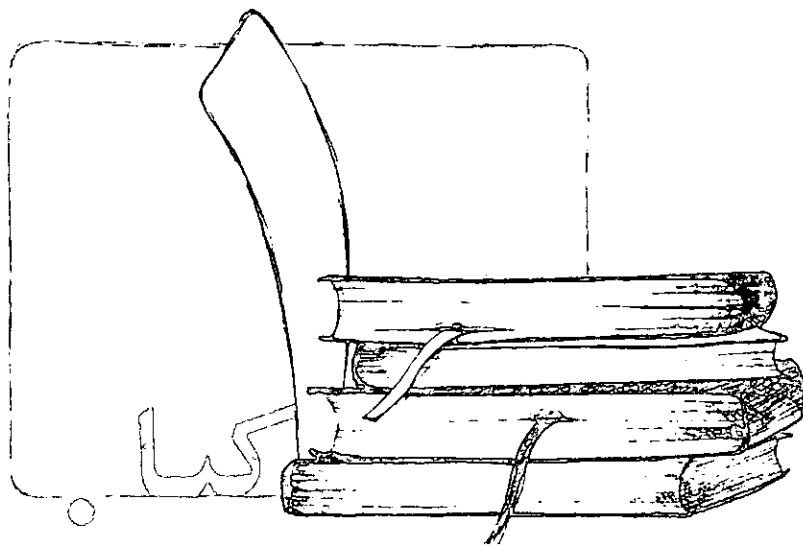
فکر نکنید نوشتن این کتاب کار آسانی بوده! برای نوشتن این کتاب عزیزان زیادی من را حمایت و همراهی کردند. بسیار ممنون و سپاسگزارم از جناب آقای دکتر نصری به خاطر حمایت‌ها، راهنمایی‌ها و انرژی‌هایشان. ممنونم از آقای دکتر اسلامی که با حوصله و دقت فراوان، کتاب را می‌خواندند و همواره نظرات مفیدی مطرح می‌کردند. نظرات دکتر کمیل نصری و مهندس کشوری هم بسیار برایم ارزشمند بود. از این دو بزرگوار نیز ممنونم. دست مهندس بقایی هم درد نکند که هوای امور اجرایی را داشتند. خسته نباشند ان‌شا...

و اما طبق روال محبوب (!)، مهندس موئینی نیز با مطالعه‌ی دقیق کتاب، ما را از تجارب علمی و کلاسی خود بی‌بهره نگذاشتند. خانم شاعری هم در ویرایش علمی کمک‌های زیادی به ما کردند.

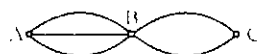
دوستان دیگر هم دستشان درد نکند و خسته نباشند؛ خانم شریعت به خاطر هماهنگی امور اجرایی، خانم خسروئی به خاطر تایپ و صفحه‌آرایی، خانم محسنی کبیر به خاطر رسم شکل‌ها، خانم شتائی به خاطر نمونه‌خوانی، خانم شریفی به خاطر گرافیک، آقای پاشازاده به خاطر طراحی جلد، آقای حق‌بین به خاطر امور چاپ و سایر عزیزانی که شاید سهواً اسمشان از قلم افتاده باشد.

و این بار طبق روال اجباری (!)، از همسرم تشکر می‌کنم که با آن‌که قریب سه فصل، غنچه‌ای زیبا را حمل می‌کردند، حواستان به من بود تا تبلی نکنم و این کتاب همراه با دختر بی‌همتایم بنیتا متولد شود!

بهترین نعمت‌ها، از آن شما



یادآوری (ترکیبیات)



یک سؤال بامزه: شما اگر بین دو شهر A و B سه جاده و بین دو شهر B و C دو جاده وجود داشته باشد، به چند طریق می‌توانید از شهر A به شهر C بروید؟ حب لابد شکل رویه‌رو را می‌کشید و راه‌ها را می‌شمارید! پس یعنی فصل هفتم ریاضی ۳ را یادتان رفته؟ اسم این فصل ترکیبات و موضوعش شمردن بود، منظورم این نیست که یکی یکی چیزها را می‌شمریم؛ ترکیبات به ما یاد داد چگونه شمردن تعداد حالت‌ها را با استفاده از قلق‌های مختلف و خیلی سریع انجام دهیم. مهم‌ترین قلق‌ها هم اگر یادمان باشد، این‌ها بودند: اصل ضرب، جایگشت، انتخاب با ترتیب و انتخاب بدون ترتیب (ترکیب). در این فصل، شدیداً به این قلق‌ها نیاز داریم؛ پس بگذارید، آن‌ها را مرور کنیم.

اصل ضرب: اگر کاری را به m طریق و کار دیگری را به n طریق بتوان انجام داد، دو کار را پشت سر هم به چند طریق می‌توان انجام داد؟ به $m \times n$ طریق؛ یعنی تعداد حالت‌ها در هم ضرب می‌شوند. کلاً هر تعداد کار داشته باشیم، تعداد حالت‌هایی که می‌توانیم آن‌ها را پشت سر هم انجام دهیم، برابر است با حاصل ضرب تعداد حالت‌های انجام هر کار در بقیه.

بین دو شهر A و B سه جاده و بین دو شهر B و C دو جاده وجود دارد، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C رفت؟

جواب: $3 \times 2 = 6$ طریق

با استفاده از چهار رنگ آبی، قرمز، سبز و نارنجی، به چند طریق می‌توان دو مربع را رنگ کرد؟

۴ × ۴

هر مربع می‌تواند ۴ رنگ داشته باشد، پس طبق اصل ضرب، دو مربع را به $4 \times 4 = 16$ طریق می‌توان رنگ کرد.

با استفاده از حروف a, b و c چند رشته‌ی (کلمه‌ی) چهار حرفی می‌توان ساخت؟

۳ × ۳ × ۳ × ۳

برای هر حرف یک خانه در نظر می‌گیریم، در هر خانه ۳ حرف می‌سود گذاشت، پس $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ کلمه می‌شود ساخت.

به کمک اصل ضرب، بگویید چند عدد سه‌رقمی داریم.

برای هر یک از سه رقم یک خانه می‌گذاریم، در خانه‌ها می‌توان رقم‌های ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۹ را گذاشت؛ البته خانگی سمت چپ نمی‌تواند صفر باشد چون در این صورت عددمان سه رقمی نخواهد شد (مثلاً ۰۲۳ که همان ۲۳ است). پس خانگی سمت چپ ۹ حالت و هر یک از دو خانگی دیگر ۱۰ حالت دارند بنابراین تعداد اعداد سه‌رقمی برابر است با:

۹ × ۱۰ × ۱۰

$9 \times 10 \times 10 = 900$

چند عدد چهاررقمی فرد بدون ارقام ۲ و ۶ و ۸ داریم؟

جواب: $4 \times 7 \times 7 \times 5 = 980$ تعداد حالت‌ها: $\begin{bmatrix} 4 & 7 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ حالت‌ها: $\begin{bmatrix} 1,3,5,7,9 & 1,3,4,5,7,9 & 1,3,4,5,7,9 & 1,3,5,7,9 \end{bmatrix}$

با ارقام ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ چند عدد سه‌رقمی با رقم‌های مختلف می‌توان ساخت؟

فرق این مثال با مثال‌های قبلی این است که در آن تکرار مجاز نیست (مثلاً ۲۳۳ که در آن ۳ تکرار شده، قبول نیست). اگر در خانگی سمت چپ یکی از چهار رقم داده‌شده را بگذاریم، برای خانگی بعدی سه رقم می‌ماند (چون یکی از ارقام در خانگی قبلی استفاده شده) و برای خانگی

۴ × ۳ × ۲

$4 \times 3 \times 2 = 24$

سمت راست دو رقم می‌ماند:

این مثال، ما را به یاد جایگشت انداخت! یادتان هست جایگشت چه بود؟

جایگشت: موضوع جایگشت این است که چند چیز را به چه طریق‌هایی می‌توانیم کنار هم بچینیم بدون آن‌که تکرار داشته باشیم (یعنی از هر چیز فقط یکی داشته باشیم). مثلاً ده نفر به چه حالت‌هایی می‌توانند در یک صف کنار هم بایستند؛ به هر یک از آن حالت‌ها یک جایگشت می‌گوییم. پس اگر تعدادی شیء مختلف داشته باشیم، به هر نحوه‌ی قرار گرفتن آن‌ها در کنار هم یک جایگشت می‌گوییم.

جایگشت‌های سه حرف a, b و c را بنویسید.

abc, acb, bac, bca, cab, cba

جایگشت‌ها این‌ها هستند:

۳ ۲ ۱

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

آیا همین ۶ جایگشت را داریم؟ بله، طبق اصل ضرب هم تعداد جایگشت‌ها ۶ می‌شود:

تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر با n! است؛ یعنی n چیز مختلف را به n! طریق می‌توان کنار هم چید. یادتان هست n! چه بود؟ این فاکتوریل همان حاصل ضرب اعداد طبیعی از ۱ تا n است.

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

چهار نفر، به چند طریق می‌توانند کنار هم بایستند؟ جواب: $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ حالت

با پنج حرف a, b, c, d و e چند رشته‌ی (کلمه‌ی) پنج حرفی با حروف متمایز می‌توان ساخت؟

$$\text{جواب: } 5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120 \text{ کلمه}$$

با چهار حرف a, b, c, d و e چند کلمه‌ی چهار حرفی با حروف متمایز می‌توان ساخت طوری که a و b کنار هم باشند؟

abed, abdc, cabd, dabc, cdab, dcab, bacd, badc, cbad, dbac, edba, dcba

جایگشت‌ها را ببینید:

شش جایگشت دوم همان شش‌تای اولی هستند که به جای ab, ba داریم. در شش جایگشت اول هم مثل این می‌ماند که a و b را یک شیء گرفته باشیم و جایگشت آن را با دو حرف دیگر نوشته باشیم. پس اگر می‌خواستیم بدون نوشتن جایگشت‌ها، به سؤال جواب دهیم، می‌گفتیم: a و b را یک شیء می‌گیریم که با دو حرف دیگر می‌شود ۳ شیء و جایگشت آن‌ها ۳! است. خود a و b هم ۲! جایگشت دارند (ba و ab). پس تعداد جایگشت‌ها می‌شود:

$$2! \times 3! = (1 \times 2) \times (1 \times 2 \times 3) = 12$$

مثالی را که حل کردیم، خوب یاد بگیرید؛ جلوتر هم مسائلی داریم که در آن‌ها می‌خواهیم دو یا چند شیء کنار هم باشند. ترفند حل این شد که آن چند شیء را یک شیء بگیریم و ادامه‌ی ماجرا! اما موضوع مثال بعدی این است که تعداد چیزهایی که داریم، با تعداد چیزهایی که انتخاب می‌کنیم و کنار هم می‌چینیم، یکی نیست. ببینید:

۵ ۴ ۳

$$5 \times 4 \times 3 = 60$$

با پنج حرف a, b, c, d, e چند کلمه‌ی سه حرفی با حروف متمایز می‌توان ساخت؟ جواب:

$5 \times 4 \times 3$ را می‌توان به شکل $\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1}$ نوشت. در واقع، در این مثال تعداد جایگشت‌های ۳ تایی از ۵ حرف را

می‌خواستیم (نه ۵ تایی از ۵ حرف را) و جواب، $\frac{5!}{(5-3)!}$ شد. پاراگراف بعدی را بخوانید تا حرف‌هایم را بهتر بفهمید!

اگر n شیء متمایز داشته باشیم، به چند طریق می‌توان k تا از آن‌ها را انتخاب کرد و با ترتیب‌های مختلف کنار هم چید؟ جواب، $P(n, k)$ است. در واقع، تعداد جایگشت‌های k تایی از n شیء متمایز را با $P(n, k)$ نشان می‌دهیم و برابر است با:

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

چند رشته‌ی (کلمه‌ی) سه حرفی با حروف متفاوت انگلیسی می‌توان ساخت؟

$$\frac{26!}{(26-3)!} = \frac{26!}{23!} = \frac{26 \times 25 \times 24 \times 23!}{23!} = 15600$$

کلاً ۲۶ حرف انگلیسی داریم، پس $P(26, 3)$ را می‌خواهیم که برابر است با:

ترکیب: تا این‌جا کار در مسائلی که مطرح کردیم، ترتیب مهم بود. مثلاً در نوشتن اعداد دورقمی با ۲ و ۴، دو عدد ۲۴ و ۴۲ با هم فرق داشتند. اما در بعضی مسئله‌ها ترتیب مهم نیست. مثلاً اگر زیرمجموعه‌های دو عضوی $\{1, 2, 3, 4\}$ با اعضای زوج را بخواهیم، $\{2, 4\}$ و $\{4, 2\}$ فرقی با هم ندارند. به این‌گونه انتخاب‌ها ترکیب می‌گوییم. یعنی اگر k شیء از n شیء متمایز انتخاب کنیم بدون آن‌که ترتیب انتخاب مهم باشد، ترکیبی k تایی از آن n شیء داریم. این ترکیب را با $C(n, k)$ یا $\binom{n}{k}$ نشان می‌دهیم (بخوانید

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

انتخاب k از n) و برابر است با:

۱۱. تعداد زیرمجموعه‌های چهار عضوی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ چیست؟

انتخاب ۴ عضو از ۱ عضو را داریم، بدون اهمیت ترتیب:

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{9!}{4!5!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$$

از میان ۸ دانش‌آموز دوم و ۱ دانش‌آموز سوم به چند طریق می‌توان ۷ نفر را انتخاب کرد طوری که ۳ دانش‌آموز دوم و ۴ دانش‌آموز سوم باشند؟

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

حالا طبق اصل ضرب، تعداد حالت‌های انجام دو کار بالا با هم برابر است:

در یک آپارتمان ۹ خانوار زندگی می‌کنند و قرار است یک شورای ۵ نفره متشکل از ساکنان آن تشکیل شود. از هر خانواده تنها زن یا شوهر می‌تواند عضو شورا شود. به چند طریق ممکن است شورای مورد نظر تشکیل شود؟

از هیچ خانواده‌ای بیش از یک نفر نمی‌تواند عضو شود؛ این شرط ما را مجبور به انتخاب ۵ خانوار می‌کند.

$$\binom{9}{5} = \frac{9!}{5!(9-5)!} = \frac{9!}{5!4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$$

همچنین از هر خانوار به ۲ حالت می‌توان عضو انتخاب کرد: زن یا شوهر؛ پس طبق اصل ضرب، از ۵ خانوار به $2^5 = 32$ حالت می‌توان عضو انتخاب کرد. حالا باید دوباره با اصل ضرب، تعداد حالت‌های انتخاب ۵ خانوار را در تعداد حالت‌های انتخاب عضو از آن ۵ خانوار ضرب کرد:

$$126 \times 32 = 4032$$

یادآوری‌ها را با نکاتی که در محاسبات لازم خواهیم داشت، تمام می‌کنیم.

- اگر به ۱ برخوردید، بدانید که ۱! = ۱. هم چنین $\binom{n}{n} = 1$ و $\binom{n}{n-1} = 1$. مثلاً:

$$\binom{7}{7} = 1, \binom{7}{6} = 7$$

- برای محاسبه‌ی راحت‌تر $\binom{n}{k}$ می‌توانید در صورت کسر، اعداد $n, n-1, \dots, n-k+1$ را در هم ضرب کنید، یعنی از n یکی یکی کم کنید تا به یک واحد بیشتر از اختلاف n و k برسید. در مخرج هم $k!$ یکی یکی کم کنید تا به ۱ برسید

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\dots 1}$$

$$\binom{11}{2} = \frac{11 \times 10}{2 \times 1} = 55, \binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

- به $\binom{n}{p}$ هم زیاد برمی‌خورید و کافی است بنویسید: $\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)}{p}$. مثلاً:

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15, \binom{9}{2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36, \binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

- این را هم داریم: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. مثلاً:

$$\binom{8}{2} = \binom{8}{6} = 28, \binom{4}{2} = \binom{4}{2} = 6$$

(می‌بینید که جمع دو عدد پایین در دو طرف تساوی، برابر با عدد بالایی است)

- وقتی اختلاف عدد پایین و بالا ۲ تا است، استفاده از نکته‌ی بالا کارتان را راحت‌تر می‌کند:

$$\binom{8}{3} = \binom{8}{5} = \frac{8 \times 7}{2} = 28, \binom{6}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

پدیده‌های تصادفی

وقتی یک تاس را می‌اندازیم، نمی‌دانیم چه عددی رو می‌شود ولی می‌دانیم عددی که رو می‌شود یکی از اعداد طبیعی ۱ تا ۶ است. وقتی یک سکه را می‌اندازیم، نمی‌دانیم چه می‌شود ولی می‌دانیم یا رو می‌آید یا پشت.

۱. یکمیلی که ۱۰۰۰ میج و هزاره میج روی هر یک از سس وجه یک مکعب، یک عدد از ۱ تا ۶ حاصل داده شده.

وقتی قرار است دو نوزاد به دنیا بیایند، نمی‌دانیم جنسیت آن‌ها چیست ولی تمام حالت‌های ممکن را می‌دانیم: «دو پسر»، «دو دختر»، «اولی پسر دومی دختر»، «اولی دختر دومی پسر».

وقتی امتحان نهایی ریاضی ۳ می‌دهیم، نمی‌دانیم نمره‌ی ما چیست اما می‌دانیم که عددی بین ۰ و ۲۰ یا مساوی آن‌هاست. خیلی از اتفاقات دور و بر ما همین‌طوری هستند؛ یعنی نمی‌دانیم نتیجه‌ی نهایی آن‌ها چیست اما می‌دانیم تمام حالت‌هایی که می‌تواند رخ دهد، چه‌ها هستند. به این پدیده‌ها می‌گوییم پدیده‌های تصادفی.



پدیده‌ی تصادفی، پدیده یا آزمایشی است که از همه‌ی حالت‌هایی که در آن ممکن است وقوع دهد مطلع هستیم اما این که کدام حالت قطعاً رخ می‌دهد را نمی‌دانیم.

اگر روی شش وجه یک تاس، یک عدد مثلاً ۳ حک شده باشد، دیگر آزمایش پرتاب تاس، تصادفی نیست. چون نتیجه‌ی آزمایش از قبل معلوم است: عدد ۳ خواهد آمد.

تمرین

- ۱- مشخص کنید هر یک از پدیده‌های زیر، تصادفی است یا نه.
 - (الف) انداختن یک سکه و یک تاس یا هم و دیدن آن‌چه ظاهر می‌شود
 - (ب) بیرون کشیدن یک مهره از کیسه‌ای که فقط شامل مهره‌های سیاه است و دیدن رنگ آن
 - (ج) تولد چهار نوزاد در یک خانواده طی چند سال آینده و بررسی جنسیت آن‌ها

فضای نمونه‌ای



در یک پدیده‌ی تصادفی، مجموعه‌ی همه‌ی حالت‌هایی را که ممکن است رخ دهد، فضای نمونه‌ای می‌نامیم و آن را با S نشان می‌دهیم.

- $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ در پرتاب یک تاس، فضای نمونه‌ای برابر است با:
- $S = \{\text{پشت}, \text{رو}\}$ در پرتاب یک سکه، فضای نمونه‌ای برابر است با:
- $S = \{\text{دختر}, \text{پسر}\}$ در تولد یک نوزاد، فضای نمونه‌ای مربوط به جنسیت برابر است با:



وقتی تعداد اعضای فضای نمونه‌ای زیاد می‌شود، ممکن است در نوشتن آن گم شویم. این‌جور مواقع برای نوشتن فضای نمونه‌ای، می‌توانیم از نمودار درختی استفاده کنیم. به این صورت که تمام حالت‌های مربوط به یک اتفاق (مثلاً جنسیت فرزند اول) را بنویسیم، بعد برای هر یک از آن حالت‌ها، تمام حالت‌های مربوط به اتفاق بعدی (مثلاً جنسیت فرزند دوم) را بنویسیم و به همین ترتیب ادامه دهیم.



برای نوشتن فضای نمونه‌ای جنسیت دو فرزند، دو ستون در نظر می‌گیریم: یکی برای فرزند اول و یکی برای فرزند دوم. در ستون اول، تمام حالت‌های ممکن را می‌نویسیم: «پ»، «د». بعد در ستون دوم نیز جلوی هر یک از حالت‌های ستون قبل، تمام حالت‌های ممکن را قرار می‌دهیم:

$\begin{matrix} \text{پ} & \Rightarrow & \text{پ پ} \\ \text{د} & \Rightarrow & \text{د پ} \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \text{پ} & \Rightarrow & \text{پ د} \\ \text{د} & \Rightarrow & \text{د د} \end{matrix}$

$$S = \{(\text{پ پ}), (\text{د پ}), (\text{پ د}), (\text{د د})\}$$