

مقدمه‌ای بر

نظریهٔ گروه‌های متناهی

علیرضا جمالی

سرشناسه
عنوان و پدیدآور
مشخصات نشر
مشخصات ظاهری
شابک
وضعیت فهرست نویسی
موضوع
رده بندی کنگره
رده بندی دیویی
شماره کتابخانه ملی

جمالی، علیرضا، ۱۳۲۱
مقدمه‌ای بر نظریه گروههای متناهی / علیرضا جمالی
تهران: مبتکران، ۱۳۹۱
۴۸۰
۹۷۸-۹۶۴-۰۷-۱۰۸۴-۵۰
فیب
نظریه گروهها -- راهنمای آموزشی (عالی)
۱۳۸۷ ع ۴ ب ۴ / PE۱۱۲۷
۴۲۸/۶
۱۳۸۶۰۶۵-۲ م



ناشر: انتشارات مبتکران (پروانه نشر: ۱۶۷/۱۰۲)

تهران: میدان انقلاب، خیابان فخررازی، خیابان نظری، پلاک ۵۹ کدپستی ۱۳۸۴۷۶۴۹۶۱

www.mobtakeran.com

تلفن: ۹۳-۶۶۹۵۴۳۹۰-۶۶۹۵۴۳۹۲ دورنگار

نام کتاب: مقدمه‌ای بر نظریه گروههای متناهی

مؤلف: علیرضا جمالی

چاپ اول: ۱۳۹۱

شمارگان: ۳۰۰۰ جلد

لیتوگرافی: صبا

چاپ: امین

بها: ۱۷۰۰۰ تومان



حقوق چاپ و نشر، محفوظ و مخصوص ناشر است و هرگونه کپی برداری و نقل مطالب بدون اجازه ناشر پیگرد قانونی دارد.

به نام آنکه جان را فکرت آموخت

مقدمه

چنان دیدم که هیچ کس کتابی نمی نویسد الا که چون
روز دیگر در آن بنگرد گوید: اگر فلان سخن چنان بودی
بهر گشتی و اگر فلان کلمه بر آن افزوده شدی نیکتر
آمدی.
عساکر کاتب

مفهوم گروه نخستین بار در اوایل سده ۱۹ معرفی شد، ولی ریشه های آن را می توان در دوران بسیار
گذشته جستجو کرد؛ در واقع، مفهوم گروه به نوعی در موضوع حرکت یا تبدیل که در هندسه قدیم به کار
می رفت نهفته بود. از اواخر سده ۱۹ که این مفهوم صورت روشنی به خود گرفت، نقش مهمی را در همه
شاخه های ریاضیات ایفا کرد. در اواخر سده ۱۹، لاگرانژ، واندرموند، و روفینی در مطالعات خود راجع به
معادلات جبری، به اهمیت گروه جایگشت های ریشه های برده بودند، و آبل با استفاده از این ایده ثابت کرد که
یک معادله کلی از درجه ناکثر از ۵ را نمی توان به طور جبری حل کرد. کوشی گروه جایگشت های ریشه ها را
به خاطر اهمیت شان مورد مطالعه قرار داد؛ ولی توصیف کامل رابطه بین گروه ها و معادلات جبری را نخستین
بار گالوا به دست داد. ژوردان به بسط نظریه آبل و گالوا پرداخت و شرح مفصلی از آن را در رساله جایگشت ها
و معادلات جبری خود به سال ۱۸۷۰ آورد. تا آن زمان گروه به معنی گروه جایگشتی به کار می رفت؛ تعریف
گروه با اصول موضوعه به وسیله کیلی (۱۸۵۴) و کرونکر (۱۸۷۰) ارائه شد. کلین در برنامه ارلانگن خود
(۱۸۷۲) به اهمیت نظریه گروه ها در مطالعه هندسه تأکید کرد و سوفوس لی نظریه گروه های لی را در سال
۱۸۸۰ ایجاد نمود. برنساید کتاب نظریه گروه های خود را منتشر ساخت که با گذشت یک سده، چاپ دوم
آن (۱۹۱۱) هنوز یک کتاب کلاسیک با ارزش در نظریه گروه های متناهی به شمار می رود. از سال ۱۸۹۶
فروبنیوس و دیگران نظریه نمایش گروه ها با ماتریسها را بسط دادند. تا آن زمان، نظریه گروه های متناهی
اهمیت اساسی خود را کسب کرده بود.

از بین شاخه های جبر مجرد، نظریه گروه ها نخستین شاخه ای بود که توسعه آن آغاز گشت، و با بسط
این شاخه از جبر بود که پیشرفت جبر مجرد در دهه ۱۹۳۰ شروع شد. از نیمه دوم این دهه، نظریه گروه ها
به پیشرفتهای بسیار زیادی نایل آمده، و توجه بسیاری از ریاضیدان به خود معطوف داشته است. از سال
۱۹۵۵ نتایج بسیار مهم و عمیقی در این نظریه به دست آمده است که شاخص ترین آنها «رده بندی گروه های
ساده متناهی» است که بنابر عقیده بسیاری از صاحب نظران ریاضی بزرگترین دستاورد ریاضی سده ۲۰
به شمار می رود.

کتاب حاضر مدخلی بر نظریه گروه‌هاست که مؤلف دوازده فصل نخست آن را سالها پیش با عنوان «مباحثی در نظریه گروه‌ها» منتشر کرد. این دوازده فصل عمدتاً مشتمل بر مباحثی در گروه‌های آبدی، نمایش آزاد گروه‌ها، گروه‌های یوچ‌توان، گروه‌های حل‌پذیر، گروه‌های زیرحل‌پذیر، و هم‌ریختی انتقال بود.

با نایاب شدن کتاب «مباحثی در نظریه گروه‌ها»، ناشر نظر نگارنده را درباره چاپ مجدد کتاب، و احیاناً تجدیدنظر در آن، جویا شد. نگارنده از مدتها پیش در فکر چنین کاری بود و نسخه دستنویسی برای خود فراهم آورده بود. کتاب حاضر براساس این نسخه تدوین شده است. دوازده فصل اول آن اساساً همان است که در چاپ نخست آمده است با تغییرات مختصری که به آن اشاره خواهد شد. مباحث کتاب قطع‌نظر از نتیجه‌های کلی که برای هر گروه دلخواه، اعم از متناهی یا نامتناهی، برقرار است، عمدتاً به گروه‌های متناهی مربوط می‌شود. به خصوص در فصل‌های افزوده شده نتیجه‌هایی بنیادی در گروه‌های متناهی ذکر می‌شوند. عنوانهای این فصلها چنین اند: قضیه‌های شکافت؛ گروه‌های « p -یوچ‌توان»، « p -حل‌پذیر»، « π -جدایی‌پذیر؛ عمل گروه‌ها بر گروه‌ها؛ و بسط گروه‌ها و کوهمولوژی. لم معروف شور-زاسنهاوس که در چاپ نخست کتاب در فصل هشتم آمده بود، در این ویراست به فصل سیزدهم به مبحث قضیه‌های شکافت منتقل شده است. همین‌طور قضیه مهم هوپرت در باب گروه‌های زیرحل‌پذیر متناهی که در چاپ پیشین کتاب در فصل یازدهم بدون اثبات بیان شده بود، در فصل سیزدهم با استفاده از قضیه‌های این فصل به اثبات می‌رسد. همچنین مشخص‌سازی گروه‌های نایوچ‌توان مینیمال که در فصل یازدهم در بخش کاربردها بدون اثبات آمده بود به فصل چهاردهم منتقل و در آنجا ثابت شده است. در این فصل به گروه‌های « p -یوچ‌توان متناهی که بعضی از خواص آنها در فصل دوازدهم آمده است پرداخته می‌شود.

در ویراست جدید مباحثی به فصل‌های نهم، دهم، یازدهم و دوازدهم چاپ پیشین کتاب افزوده شده است. این مباحث مشتمل است بر نتیجه‌هایی در مورد خواص زیرگروه‌های زیرنرمال گروه‌های متناهی، رده‌بندی کامل گروه‌های مرتبه ۱۶، حاصل ضرب مرکزی گروه‌ها، « p -گروه‌های فراخاص، رادیکال و مانده، و کاربردهایی از قضیه شور درباره متناهی بودن زیرگروه مشتق در گروه‌هایی که دارای یک زیرگروه مرکزی با شاخص متناهی‌اند.

اما فصل‌های افزوده شده بر کتاب مشتمل بر نتیجه‌هایی بنیادی در نظریه گروه‌های متناهی‌اند که خواستاران تحقیق در این شاخه از ریاضیات بی‌نیاز از آنها نیستند. در فصل سیزدهم به قضیه‌های مهم شکافت شور-زاسنهاوس و گانتوسس پرداخته می‌شود. فصل چهاردهم به مطالعه گروه‌های « p -یوچ‌توان و مشخص‌سازی آنها، گروه‌های « p -حل‌پذیر»، « π -جدایی‌پذیر و نتیجه‌های بنیادی مانند قضیه‌های هال-هیگمن و هال-چونیخین اختصاص دارد. ضمناً در این فصل دستگاه‌های سیلو، گروه‌های نایوچ‌توان مینیمال و قضیه ویلانت در مورد گروه‌هایی متناهی که دارای « π -زیرگروه‌های هال یوچ‌توان‌اند معرفی و مطالعه می‌شوند. فصل پانزدهم در مورد عمل گروه‌ها بر گروه‌ها و قضیه گلاویرمن در مورد عمل‌های متباین و قضیه مشهور $P \times Q$ تامسپون و نیز عمل بر گروه‌های آبدی و عمل‌های خالی از نقطه ثابت است. سرانجام کتاب با مبحث مهم توسعه گروه‌ها و کوهمولوژی به پایان می‌رسد. در این فصل پس از مطالعه خواص بنیادی توسعه

گروهها، به معرفی گروههای کوهمولوژی اول و دوم و نقش آنها در نظریه گروههای متناهی پرداخته می شود. در این فصل برخی از قضیه های شکافت با استفاده از خواص گروههای کوهمولوژی اول و دوم از نو ثابت می شوند. مطالب کتاب برای دانشجویان دوره های تحصیلات تکمیلی که خواستار تحصیل و تحقیق در نظریه گروههای متناهی اند، تدوین شده است. مباحث فصلهای اول تا یازدهم منطبق بر سرفصلهای درس «نظریه گروههای متناهی ۱» دوره کارشناسی ارشد ریاضی است، و مباحث فصلهای دیگر با سرفصلهای درس «نظریه گروههای متناهی ۲» دوره دکتری ریاضی انطباق دارد.

کتاب حاضر مشتمل بر قریب ۸۰۰ تمرین است. در این ویراست تمریناتی نیز به دوازده فصل نخست کتاب افزوده شده است و در سراسر کتاب تمرینات نسبتاً دشوار با راهنماییهای مقتضی همراه شده است. عنوان کتاب از «مباحثی در نظریه گروهها، قسمت اول: نظریه گروههای متناهی» به «مقدمه ای بر نظریه گروههای متناهی» تغییر یافته است. همان گونه که در مقدمه چاپ نخست کتاب آمده است، قرار بود قسمت دوم کتاب به گروههای جایگشتی و خطی اختصاص یابد. گرچه این وعده تاکنون محقق نشده است، ولی مؤلف هنوز بر عهد خود پای بند است و در صورت فراهم آمدن شرایط مقتضی بدین کار مبادرت خواهد کرد. مانند چاپ نخست کتاب، متن کتاب را خانم مهناز صمدیان با دقت فراوان تایپ کرده اند که مؤلف لازم می داند از زحمات ایشان تشکر کند. همچنین لازم است از آقای مبتین و خانمهای بی طرف و همکاران ایشان در بخش تولید شرکت مبتکران که امور مربوط به چاپ کتاب را برعهده داشتند قدردانی کند. بالاخره بر خود فرض می دانم مراتب سپاس ویژه خود را از آقای یحیی دهقانی مدیرعامل فرهنگ دوست شرکت آموزشی، فرهنگی و انتشاراتی مبتکران که مانند گذشته با اشتیاق چاپ کتاب را پذیرفتند اعلام دارم.

علیرضا جمالی

دانشگاه خوارزمی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

تهران، تابستان ۱۳۹۱

فهرست مطالب

۱	مفاهیم اساسی نظریه گروهها	فصل اول
۱۰۱	گروهها، زیرگروهها، قضیه‌های یکرختی	۱۰۱
۲۰۱	گروههای جایگشتی	۲۰۱
۲۵	عمل گروهها بر مجموعه‌ها و گروههای جایگشتی	فصل دوم
۲۶	عمل گروهها بر مجموعه‌ها	۱۰۲
۳۰	نمایش فروبنیوس یک گروه و قضیهٔ شوارز	۲۰۲
۳۳	پایدارسازی و مدار	۳۰۲
۳۹	شمارش مدارها	۴۰۲
۵۴	چند گروه ساده	فصل سوم
۵۵	گروه متناوب A_n	۱۰۳
۵۹	گروههای خطی خاص تصویری	۲۰۳
۶۹	قضیه‌های سیلو و کاربردهایی از آنها	فصل چهارم
۶۹	قضیه‌های سیلو	۱۰۴
۸۰	رده‌بندی گروههای سادهٔ متناهی تا مرتبهٔ ۳۰۰	۲۰۴
۱۰۱	حاصل ضرب مستقیم گروهها و تجزیه پذیری	فصل پنجم
۱۰۱	تعریفها و خواص اساسی	۱۰۵
۱۰۵	گروههای کاملاً تحویل پذیر، و مشخصه‌ای ساده	۲۰۵
۱۱۰	درون ریختیهای نرمال و تجزیه پذیری	۳۰۵

۱۲۷	ساختمان گروههای آبله منتهای مولد، و خودریختیها	فصل ششم
۱۲۷	گروههای آبله منتهای	۱-۶
۱۳۳	گروههای آبله منتهای مولد	۲-۶
۱۴۰	زیرگروههای گروههای آبله منتهای مولد	۳-۶
۱۴۳	گروه خودریختیهای یک گروه و خواص اساسی آن	۴-۶
۱۴۵	گروه خودریختیهای یک گروه دوری منتهای	۵-۶
۱۵۷	نمایش آزاد گروهها	فصل هفتم
۱۵۷	گروههای آزاد	۱-۷
۱۶۴	نمایش آزاد گروهها و تبدیلات تی-تیز	۲-۷
۱۷۲	نمایش گروههای Q_{2^n} و D_{2^n}	۳-۷
۱۸۰	حاصل ضرب نیم مستقیم گروهها و برخی رده بندیها	فصل هشتم
۱۸۰	تعریفها و نتایج بنیادی	۱-۸
۱۸۶	برخی رده بندیها	۲-۸
۱۹۶	حاصل ضرب حلقوی گروهها	۳-۸
۲۰۲	سریها و زیرگروههای زیرنرمال	فصل نهم
۲۰۲	تعریفهای اساسی و نتایج بنیادی	۱-۹
۲۰۶	سری ترکیبی و قضیه ژوردان-هولدر	۲-۹
۲۰۹	زیرگروههای زیرنرمال	۳-۹
۲۱۸	گروههای پوچ توان	فصل دهم
۲۱۸	تعریفها و خواص اساسی	۱-۱۰
۲۲۴	سریهای مرکزی پایینی و بالایی یک گروه، و لم فیتینگ	۲-۱۰
۲۳۲	زیرگروه فراتینی، قضیه پایه برنساید	۳-۱۰
۲۳۷	گروههای پوچ توان منتهای مولد	۴-۱۰
۲۴۰	مشخص سازی برخی از p -گروههای منتهای	۵-۱۰
۲۴۹	حاصل ضرب مرکزی گروهها	۶-۱۰
۲۵۵	p -گروههای فراخاص	۷-۱۰

فصل یازدهم	گروههای حل پذیر، زبرحل پذیر، و چنددوری	۲۶۵
۱-۱۱	تعریفها و قضیه های اساسی	۲۶۵
۲-۱۱	گروههای حل پذیر منتهای	۲۷۳
۳-۱۱	گروههای زبرحل پذیر منتهای	۲۷۹
۴-۱۱	گروههای ناآبلی مینیمال منتهای	۲۸۴
۵-۱۱	رادیکال و مانده	۲۸۷

فصل دوازدهم	هریختی انتقال و برخی از کاربردهای آن	۲۹۵
۱-۱۲	نتایج بنیادی	۲۹۵
۲-۱۲	کاربردهایی از انتقال	۲۹۹
۳-۱۲	کاربردهایی از قضیه شور	۳۰۳

فصل سیزدهم	قضیه های شکافت	۳۰۹
۱-۱۳	لم شورزاسنهایس و قضیه گاشوتس	۳۰۹
۲-۱۳	گروههای زبرحل پذیر منتهای و قضیه هوپرت	۳۱۹
۳-۱۳	زیرگروه فیتینگ گروههای حل پذیر منتهای	۳۲۳

فصل چهاردهم	گروههای π -پوچ توان، π -حل پذیر و π -جدایی پذیر	۳۳۶
۱-۱۴	گروههای π -پوچ توان	۳۳۷
۲-۱۴	گروههای π -حل پذیر و π -جدایی پذیر منتهای	۳۴۵
۳-۱۴	دستگاههای سیلو	۳۵۳
۴-۱۴	گروههای ناپوچ توان مینیمال و زیرگروههای هال π -پوچ توان	۳۵۶

فصل پانزدهم	عمل گروهها بر گروهها	۳۶۵
۱-۱۵	تعریفها و نتیجه های مقدماتی	۳۶۵
۲-۱۵	عمل متباین	۳۶۹
۳-۱۵	قضیه $P \times Q$ ی تامپسون	۳۷۹
۴-۱۵	عمل بر گروههای آبلی	۳۸۲
۵-۱۵	عمل های خالی از نقطه ثابت	۳۸۷

فصل شانزدهم	توسیع گروهها و کوهمولوژی	۳۹۹
۱-۱۶	توسیعها و توسیعهای شکافته شده	۳۹۹

۴۰۳	زوجهای عاملی	۲۰۱۶
۴۱۵	توسیع گروههای آبلی و گروه کوهمولوژی دوم	۳۰۱۶
۴۲۰	گروه کوهمولوژی اول و کاربردهایی از آن	۴۰۱۶

۴۴۱	فهرست علامتها
۴۴۵	نام گروهها
۴۴۶	نمایه نامها
۴۴۸	نمایه
۴۵۵	کتابنامه
۴۵۷	واژه‌نامه انگلیسی