



انتشارات دانشگاه شیراز

۵۲۶

آشنایی با مبانی ریاضیات

تألیف

محمد رضا سپهری نوبندگان

www.ketab.ir

سرشناسه	سیهری نوبندگانی، محمدرضا، ۱۳۲۵ -
عنوان و نام پدیدآور	آشنایی با مبانی ریاضیات / تألیف محمدرضا سیهری نوبندگانی.
مشخصات نشر	شیراز : دانشگاه شیراز ، مرکز نشر ، ۱۳۹۷.
مشخصات ظاهری	میزده ، ۲۳۸ ص.؛ نمودار.
فروست	دانشگاه شیراز، مرکز نشر؛ ۵۲۶
شابک	۹۷۸۹۶۴۴۶۲۵۲۶۸
وضعیت فهرست نویسی	قدیم
یادداشت	چاپ قبلی: آینه، ۱۳۹۰.
یادداشت	کتابنامه.
موضوع	ریاضیات -- راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع	Mathematics -- Study and teaching (Higher)
موضوع	ریاضیات -- مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالی)
موضوع	Mathematics -- Problems, exercises, etc. (Higher)
شناسه افزوده	دانشگاه شیراز، مرکز نشر
رده بندی کنگره	۱۳۹۷ ۲۳۱۵ / ۳۳۷۳ Q۸۳۷۳
رده بندی دیویی	۵۱۰/۷۶
شماره کتابشناسی ملی	۵۱۳۸۰۰۴



www.ketab.ir

آشنایی با مبانی ریاضیات

تألیف: محمدرضا سیهری نوبندگانی

ویراستار علمی: دکتر محمدصادق مرآتی

چاپ اول، ویراست دوم: ۱۳۹۷

شمارگان: ۱۰۰۰ نسخه

قیمت: ۵۹۰۰۰۰ ریال

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاه شیراز محفوظ است

شیراز، میدان ارم، کوی دانشگاه شیراز - کد پستی ۸۵۱۱۵ - ۷۱۹۴۶ صندوق پستی ۱۱۶۱

تلفن و تلفکس: ۰۷۱۳۶۲۷۳۰۵۰

* از آنجا که ویراست اول کتاب در انتشارات آینه به چاپ رسیده است، ویراست دوم کتاب در انتشارات دانشگاه شیراز به عنوان چاپ اول محسوب می‌شود.

پیش‌گفتار

www.ketab.ir

پیش‌گفتار چاپ اول^۱

ماجرا

ماجرا از این قرار است که پس از بازگشایی دانشگاهها، در برنامه آموزشی رشته ریاضی، مانند سایر رشته‌های دانشگاهی، تغییرات عمده‌ای به وجود آمد. یکی از این تغییرات، اضافه شدن درس مبانی ریاضیات به دروس الزامی این رشته است. از اهداف کلی آموزشی این درس، آشنایی دانشجویان با زبان و منطق ریاضی، به منظور ارتقای توانایی آنان در درست‌نوشتن و درست‌اثبات کردن و آشنایی دانشجویان با پاره‌ای از مفاهیم بنیادی ریاضیات، مانند مجموعه‌ها و تابعها عنوان شده است.

در دانشگاه شیراز، تدریس این درس، از همان ابتدا، به اینجانب واگذار گردید. از آنجائی که این درس، در آن زمان، نه تنها در کشور ما که در کشورهای دیگر نیز درس به نسبت جدیدی می‌بود، کتاب درسی مناسب و شناخته شده‌ای برای آن در دسترس نبود.

^۱ چاپ اول این کتاب، توسط انتشارات آینه به چاپ رسیده است.

اولین کتاب درسی، که با مشورت همکاران انتخاب کردم فصل اول ترجمه کتاب جبر گودمان بود. از همان ابتدا، متوجه شدم که این کتاب مناسب اهداف آموزشی این درس نیست.

دومین کتاب درسی که چند دوره تدریس کردم نسخه کپی شده از کتاب **Set theory: an intuitive approach**، نوشته شوینگتی و... بود که آقای دکتر اسفندیار اسلامی از دانشگاه شهید باهنر کرمان برایم فرستاد. مطالب این کتاب با سرفصل درس مبانی ریاضیات همخوانی داشت. از این رو، قرار شد نسخه اصلی این کتاب تهیه و پس از تکثیر در اختیار دانشجویان قرار داده شود. اما، پس از مدتی جستجو، معلوم شد که این کتاب از چاپ خارج شده است. به دنبال کتاب دیگری می‌گشتم که شادروان دکتر کریم صدیقی نسخه‌ای از این کتاب، که تجدید چاپ شده بود و به **Set Theory with Applications** تغییر نام یافته بود، از کانادا برایم فرستاد. نسخه اصلی (انگلیسی) این کتاب به تعداد زیادی تکثیر و در بسیاری از دانشگاه‌های کشور توزیع گردید. پس از چندی، این کتاب توسط آقای عمید رسولیان، عضو هیأت علمی دانشگاه تهران، ترجمه شد و مرکز نشر دانشگاهی، تهران با ویراستاری استاد منوچهر وصال منتشر نمود. از این به بعد، این کتاب، در اکثر دانشگاه‌های کشور، کتاب درسی درس مبانی ریاضیات شناخته شد. اینجانب ترجمه این کتاب را سالها تدریس کردم.

سومین کتابی که مبحث منطق درس مبانی ریاضیات را از آن تدریس نمودم کتاب درآمدی به منطق جدید نوشته دکتر ضیاء موحد است. چهارمین کتاب، کتاب مبانی و مقدمات علم ریاضی نوشته آقای ناصر بروجر دیان است که بجز مبحث منطق، بقیه مباحث مبانی ریاضیات را از این کتاب تدریس کرده‌ام.

از تمامی کتابهایی که ذکر آنها رفت بهره‌های وافی گرفته‌ام. حاصل این بهره‌ها، کتاب حاضر است که از پنج سال پیش نگارش آن را شروع کرده‌ام و هم‌اکنون رو به اتمام است.

انگیزه

مهمترین انگیزه‌هایی که مرا به نگارش این کتاب واداشتند به قرار زیرند:

تجربه بیش از ربع قرن تدریس مبانی ریاضیات از کتابهای متعددی که ذکر بعضی از آنها در بالا رفت. هم‌چنین، تدریس درسهای نظریه مجموعه‌ها و منطق ریاضی که این دو درس، در واقع، پشتوانه

علمی درس مبانی ریاضیات محسوب می‌شوند.

تجربه‌ای که در امر نگارش و ویرایش کتاب، در سالهای ۵۷-۱۳۵۵ در سازمان ویرایش و تولید فنی دانشگاه آزاد ایران (پیام نور فعلی) کسب کرده‌ام. این سازمان، بعد از انقلاب، به مرکز نشر دانشگاهی تهران تغییرنام یافته است و هم‌اکنون از معتبرترین سازمانهای انتشاراتی کتابهای دانشگاهی است.

ظهور نرم‌افزار FarsiTeX و نرم‌افزارهای مشابه، در عرصه نگارش کتابهای ریاضی، شاید این یکی، از سایر انگیزه‌ها قویتر باشد؛ زیرا، با کارهای سختی که، قبل از ظهور این نرم‌افزارها، انجام می‌شد تا یک کتاب ریاضی زیر چاپ رود آشنا بوده‌ام و می‌دیدم که این نرم‌افزارها چقدر کار را آسان می‌کنند.

و انگیزه دیگر اینکه اگر این کتاب را نمی‌نوشتم در انجام وظیفه علمی خود مقصر می‌بودم.

سپاس داشت

بنابر وظیفه، از افراد زیر سپاس می‌دارم:

- تمام مدرسان و دانشجویانی که نسخه‌های پیش از چاپ این کتاب را مطالعه کرده‌اند و اشتباهات آن را تذکر داده‌اند؛ اجر همه آنان با خدا.
- جناب دکتر مهدی ابراهیمی، استاد دانشگاه شهید بهشتی؛ ایشان در سفری علمی که به دانشگاه شیراز داشتند، نسخه ناتمامی از این کتاب را ورق زدند و در همان فرصت کوتاه، دستورات مفید و بجائی دادند که همگی انجام شد.
- آقای دکتر افشین امینی عضو هیأت علمی بخش ریاضی دانشگاه شیراز؛ ایشان با تدریس این کتاب و مطالعه دقیق آن، تصحیحات دقیق و شایسته‌ای، هم در زمینه ریاضی و هم در زمینه نگارشی، انجام داده‌اند.
- خانم دکتر ساره حق‌خواه؛ ایشان با تدریس نسخه پیش‌چاپ این کتاب، تصحیحات ارزشمندی را انجام داده‌اند.

• آقایان علی محمد روستا، دانشجوی سابق کارشناسی ارشد فیزیک و حجت فرزادفر دانشجوی دکتری ریاضی دانشگاه شیراز؛ از این دو بزرگوار، رمزها و فوت و فن های کارگشائی را از نرم افزار اسرارآمیز FarsiTeX که با آن این کتاب را خود نگاشته ام و صفحه آرائی کرده ام، آموخته ام.

درس مبانی

این درس، که نام قدیم آن مبانی ریاضیات و نام جدید آن مبانی علوم ریاضی و در بین دانشجویان ریاضی به مبانی شهرت یافته است، از همان ابتدای ورود به صحنهٔ دروس رشتهٔ ریاضی، معرکهٔ آرای صاحب نظران ریاضی دانشگاه های کشور گردیده است.

گروهی بر این باورند که این درس، درسی ناکارآمد و غیر ضروری است. اینان می گویند: این درس جز مشتی اصطلاحات چیز ارزشمندی به معلومات دانشجو نمی افزاید و با این اصطلاحات کسی راه ریاضی خواندن را نمی یابد. تنها با گرفتن درسهائی درست و حسابی، مانند جبر و آنالیز و هندسه و...، است که شخص عملاً، وارد میدان ریاضیات می شود و با وارد میدان شدن راه را هم می یابد.

در مقابل، گروهی دیگر معتقدند که ماکث مشکلاتی که بر سر راه آموزش ریاضیات عالی پدیدار می شوند ریشه در مبانی ریاضیات دارند. اینان می گویند: آن زمان که مبانی لازم نبوده است ریاضیات هم همگانی نبوده است؛ ضرورت این درس از زمانی احساس شده است که دانش ریاضی همگانی گردیده است. بعضی از این گروه، پا را فراتر گذاشته و می گویند: یک درس برای مبانی کافی نیست.

چنانکه ملاحظه می شود هر دو گروه حرفهای قابل تأملی دارند. نتیجه آنکه درس مبانی هم می تواند مفید باشد و هم غیر ضروری و این بستگی به آن دارد که چه کتابی تدریس شود، کدام مدرس درس دهد و با چه روشی تدریس گردد.

کلامی با دانشجویان

شما دانشجویان درس شیرین مبانی علوم ریاضی، اگر اینجا و آنجا شنیده اید که این درس درس سختی است و قبول شدن در آن مرد حریف می خواهد باور نکنید این حرفها حرف آن دسته از دانشجویانی است که درس شان به موقع نمی خوانند، تمرین نمی کنند و تنها در شب امتحان دست به عمل ناشایست حفظ کردن می زنند. آنان با « دقت » میانه خوبی ندارند با « قواعد مبانی ریاضیات » سر جنگ دارند و از « چون و چرا » بیزارند. اگر شما قصد آن کرده اید که در این درس و سایر دروس ریاضی نمرهٔ خوب

بیاورید و از مطالعه آنها لذت برید نکات زیر را رعایت نمائید.

- درس خواندن را برای شب امتحان نگذارید. درس خواندن مثل نماز خواندن است مثل غذا خوردن است؛ هر روز باید درس بخوانید.

- کتاب درسی را « دقیق » بخوانید. از مطلبی که خوب نفهمیده‌اید به آسانی نگذرید. اگر مطلبی را متوجه نشدید از یک هم‌کلاسی مطمئن و یا استاد درس و یا استاد تمرین بپرسید. در مکتب ریاضی، زیاد خواندن معیار نیست خوب خواندن است که معیار است.

- « خواندن ریاضی » یعنی « نوشتن ریاضی ». ریاضی که روزنامه و یا رمان نیست که بخوانیم و بگذریم. ریاضی را باید نوشت. کتاب را ببندید و قضایا را خود اثبات کنید و مثالها را خود حل کنید. به کتاب زمانی مراجعه کنید که بخواهید نوشته خود را و یا حل خود را با آن بسنجید. نوشته‌های ریاضی خود را به افراد مطمئن نشان دهید تا از صحت آنها مطمئن شوید.

- اگر در مسیر مطالعه ریاضی (یعنی نوشتن ریاضی)، مطلبی را متوجه نمی‌شوید یک احتمال آن است که مطالب « پیش نیاز » آن را نمی‌دانید. مطالب ریاضی زنجیروارند، یکی پیش‌نیاز دیگری است.

- شما را به شرکت در کلاس تمرین توصیه می‌کنم. شرکت در کلاسی تمرین از شرکت در کلاس درس واجب‌تر است. از « کوئیز » یا امتحانک نترسید. از استاد درس و یا استاد تمرین بخواهید تا از شما کوئیز بگیرد.

- در کلاس ریاضی با علاقه شرکت کنید. ریاضی را با علاقه بخوانید. اگر به اینها علاقه ندارید، به مشاور مراجعه کنید و یا تغییر رشته دهید. انتخاب رشته تحصیلی مثل انتخاب همسر است. برای درآمد بیشتر و یا از سر ناچاری آن را انتخاب نکنید. یک عمر می‌خواهید با آن زندگی کنید و به آن پز دهید.

از این دست توصیه‌ها فراوان است. استادان ریاضی شما، در فرصتهای مناسب، از این توصیه‌ها می‌کنند. آنها را جدی بگیرید.

پیش‌گفتار ویراست دوم

در ویراست دوم این کتاب، علاوه بر اصلاح غلطهای چاپ اول، بعضی از فصلها جابجا شده‌اند، از بعضی از آنها کاسته و بر بعضی افزوده شده است. هدف از این تغییرات، رعایت اصول حاکم بر فراگیری بوده است.

فصل ۱ عنوان این فصل یادآوری است که به یادآوری دو مبحث از دوره دبیرستان، مجموعه‌ها و اعداد حقیقی، پرداخته شده است. در این یادآوری، بر دو نکته مهم آموزشی تأکید گردیده است: درست نوشتن و درست استدلال کردن؛ همان دو نکته‌ای که ممکن است در دوره دبیرستان از آن غفلت شده باشد، اما، در مقطع دانشگاه از ابزار مهم کارند. گرچه شیوه نگارش و قواعد استنتاج در فصلهای بعد آمده‌اند، اما، هدف این بوده است که دانشجویان قبل از اینکه به‌طور رسمی با این قواعد برخورد کنند، به‌طور غیر رسمی، آنها را تمرین کرده باشند.

فصل ۲ در این فصل، زبان ریاضیات، به‌طور مختصر، معرفی شده است. زبان ریاضیات به زبان معمولی ریاضیات و زبان نمایی تقسیم شده‌اند و در دو بخش جداگانه ارائه گردیده‌اند تا این بدآموزی اتفاق نیفتد که ریاضی نوشتن یعنی با نماد نوشتن.

فصل ۳ این فصل که عنوان آن "اثبات" است به شیوه نگارش متون اثبات، قواعد استنتاج و فنون اثبات اختصاص یافته است. استقرای ریاضی و خاصیت خوشترتیبی نیز در ردیف فنون اثبات آمده است.

فصل ۴ عنوان این فصل، "مجموعه‌ها" است. بحث مقدماتی مجموعه‌ها در فصل ۱ آمده است. در این فصل، تعمیم اجتماع و اشتراک ارائه گردیده است.

فصل ۵ این فصل به دو مبحث مهم رابطه‌ها و تابع‌ها اختصاص یافته است.

فصل ۶ در فصل ۶، مفهوم زیبایی نامتناهی مطرح گردیده است؛ مجموعه‌های نامتناهی و اعداد اصلی، به‌منظور رعایت اختصار، اثبات بعضی از قضایا به فصل ضمیمه برده شده است.

فصل ۷ اصل انتخاب و لم زرن در این فصل آمده‌اند؛ اما، خیلی مختصر. چند مسئله ساده نیز با استناد به آنها حل گردیده است. این جانب، به‌لحاظ تجربه طولانی که از تدریس این درس دارم، پیشنهاد

می‌کنم این دو مبحث در درسی مانند مبانی جبر تدریس شود؛ زیرا، برای دانشجوی سال اول قابل جذب نیست.

فصل ۸ ضمیمه. این فصل در دو بخش تدوین شده است. در بخش ۱، اثبات بعضی از قضایای فصل ۶ آمده است. بخش ۲ شامل بیان مختصری از اصل ماکسیمالی هاوسدورف و اصل مقایسه پذیری اعداد اصلی است.

مطالعه این فصل به دانشجویان علاقه‌مند توصیه می‌شود.

این چاپ توسط آقای صادق مرآتی، دانشجوی دکترای هندسه دانشگاه شیراز، ویرایش نگارشی و علمی شده است.

فهرست مطالب

۱	یادآوری	۱
۱	۱.۱ یادآوری مجموعه‌ها	۱
۱	۱.۱.۱ مفهوم مجموعه و عضویت	۱
۲	۲.۱.۱ نمایش مجموعه	۲
۶	۳.۱.۱ روابط بین مجموعه‌ها	۶
۱۱	۴.۱.۱ اعمال روی مجموعه‌ها	۱۱
۱۲	۵.۱.۱ خواص مقدماتی مجموعه‌ها	۱۲
۲۰	۶.۱.۱ تمرین	۲۰
۲۳	۲.۱ یادآوری اعداد حقیقی	۲۳
۲۳	۱.۲.۱ اصول موضوع جمع	۲۳
۲۷	۲.۲.۱ اصول موضوع ضرب	۲۷
۲۹	۳.۲.۱ اصول موضوع ترتیب	۲۹
۳۲	۴.۲.۱ اصل کمال	۳۲
۳۴	۵.۲.۱ تمرین	۳۴
۳۷	۲ زبان ریاضیات	۳۷
۳۸	۱.۲ زبان ریاضیات	۳۸
۳۸	۱.۱.۲ اشیاء ریاضی و عالم سخن	۳۸
۳۹	۲.۱.۲ عناصر زبان ریاضیات	۳۹

۴۹	تمرین	۳.۱.۲
۵۰	زبان نمادی	۲.۲
۵۱	نمادهای زبان نمادی	۱.۲.۲
۵۵	ترجمه به زبان نمادی	۲.۲.۲
۵۸	تمرین	۳.۲.۲
۶۰	جمله‌های ریاضی	۳.۲
۶۰	انواع جمله‌های ریاضی	۱.۳.۲
۶۱	تجزیه جمله‌های مرکب	۲.۳.۲
۶۴	نقیض جمله‌های مرکب	۳.۳.۲
۶۸	تمرین	۴.۳.۲
۷۱	اثبات ریاضی	۳
۷۳	شیوه نگارش	۱.۳
۷۳	نکات مهم شیوه نگارش	۱.۱.۳
۷۳	مدارک قابل استناد	۲.۱.۳
۷۴	رئوس اثبات و جزئیات اثبات	۳.۱.۳
۷۵	شیوه مطالعه متون اثبات در کتابهای درسی	۴.۱.۳
۷۵	شیوه نوشتن متن اثبات در برگه‌های امتحانی	۵.۱.۳
۷۶	تمرین	۶.۱.۳
۷۶	قواعد استنتاج	۲.۳
۷۶	استنتاج	۱.۲.۳
۷۷	قواعد استنتاج جمله‌ها	۲.۲.۳
۸۲	قواعد استنتاج سورها	۳.۲.۳
۸۷	تمرین	۴.۲.۳
۸۷	فنون اثبات	۳.۳
۸۸	فنون اثبات کردن	۱.۳.۳
۱۰۵	فنون رد کردن	۲.۳.۳

۱۰۹	تمرین	۳.۳.۳
۱۱۰	اثبات با استقرای ریاضی و خوشترتیبی	۴.۳
۱۱۰	استقرای ریاضی	۱.۴.۳
۱۱۸	تعریف استقرایی یا بازگشتی	۲.۴.۳
۱۲۴	خاصیت خوشترتیبی	۳.۴.۳
۱۲۶	تمرین	۴.۴.۳

۱۲۹	مجموعه‌ها	۴
۱۳۰	تعمیم اجتماع و اشتراک	۱.۴
۱۳۰	تعمیم اجتماع	۱.۱.۴
۱۳۴	تعمیم اشتراک	۲.۱.۴
۱۳۷	تمرین	۳.۱.۴
۱۳۸	حاصل ضرب مجموعه‌ها	۲.۴
۱۳۸	زوج مرتب	۱.۲.۴
۱۳۹	حاصل ضرب مجموعه‌ها	۲.۲.۴
۱۴۳	تعمیم حاصل ضرب مجموعه‌ها	۳.۲.۴
۱۴۴	تمرین	۴.۲.۴

۱۴۷	رابطه و تابع	۵
۱۴۷	رابطه	۱.۵
۱۴۷	تعاریف و مثال	۱.۱.۵
۱۵۱	رابطه هم‌ارزی	۲.۱.۵
۱۵۶	افراز یک مجموعه	۳.۱.۵
۱۵۷	ارتباط افراز و رابطه هم‌ارزی	۴.۱.۵
۱۶۰	تمرین	۵.۱.۵
۱۶۲	تابع	۲.۵
۱۶۲	کلیات	۱.۲.۵
۱۶۸	تصویر مستقیم و تصویر معکوس یک مجموعه	۲.۲.۵

۱۷۴	توابع یک به یک و پوشا	۳.۲.۵
۱۷۹	ترکیب توابع	۴.۲.۵
۱۸۲	تابع معکوس	۵.۲.۵
۱۸۳	تحدید و توسیع توابع	۶.۲.۵
۱۸۴	تمرین	۷.۲.۵
۱۹۱	مجموعه‌های نامتناهی	۶
۱۹۲	هم‌عددی	۱.۶
۱۹۲	کلیات	۱.۱.۶
۱۹۴	مجموعه‌های N_k	۲.۱.۶
۱۹۵	مجموعه‌های متناهی	۳.۱.۶
۱۹۷	مجموعه‌های نامتناهی	۴.۱.۶
۱۹۹	تمرین	۵.۱.۶
۲۰۰	مجموعه‌های شمارا	۲.۶
۲۰۱	کلیات	۱.۲.۶
۲۰۲	مجموعه‌های شمارای نامتناهی	۲.۲.۶
۲۰۳	شناسائی مجموعه‌های شمارا	۳.۲.۶
۲۰۵	خواص مجموعه‌های شمارا	۴.۲.۶
۲۰۶	مجموعه‌های ناشمارا	۵.۲.۶
۲۰۷	تمرین	۶.۲.۶
۲۰۸	اعداد اصلی	۳.۶
۲۰۹	اصول اعداد اصلی	۱.۳.۶
۲۱۰	مقایسه اعداد اصلی	۲.۳.۶
۲۱۱	حساب اعداد اصلی	۳.۳.۶
۲۱۷	تمرین	۴.۳.۶
۲۱۹	اصل انتخاب و لم زرن	۷
۲۱۹	اصل انتخاب	۱.۷

۲۲۱	تمرین	۱۰۱۰۷
۲۲۱	لم زون	۲۰۷
۲۲۴	تمرین	۱۰۲۰۷

۲۲۵	ضمائم	۸
۲۲۵	ضمیمه فصل ۶	۱۰۸
۲۳۲	ضمیمه فصل ۷	۲۰۸
۲۳۴	اصل ماکسیمالی هاوسدورف	۱۰۲۰۸
۲۳۴	اصل مقایسه پذیری اعداد اصلی	۲۰۲۰۸