

۲۰۹۶۷۹۹

کتاب



حسابان کسری و حساب تیسرات کسری

مؤلف:

مریم محمدی



سرشناسه	: محمدی، مریم، ۱۳۶۰
عنوان و نام پدیدآور	: حسابان کسری و حساب تغییرات کسری / مولف مریم محمدی،
مشخصات نشر	: تهران: سنجش و دانش
مشخصات ظاهری	: ۱۰۸ ص.: نمودار،
شابک	: 978-622-050894-6
وضعیت فهرست نویسی	: فیبا
موضوع	: مشتق گیری
موضوع	: Fractional calculus
موضوع	: مشتق گیری -- مسائل و تمرین ها و غیره
موضوع	: Fractional calculus -- Problems, exercises, etc
رده بندی کتبی	: Q۲۱۴
رده بندی دیپو	: ۵۱۵/۸۳
شماره کتابت	: ۶۰۹۸۰۵۹

عنوان: حسابان کسری و حساب تغییرات کسری	 www.sanjesh.ir sanjeshodanesh@iran.ir قیمت: ۳۵۰۰۰۰ ریال
مولف: مریم محمدی	
ناشر: سنجش و دانش	
نوبت چاپ: اول - ۱۳۹۸	
تیراژ: ۵۰۰ نسخه	
شابک: ۹۷۸-۶۲۲-۰۵-۰۸۹۴-۶	
نشانی: میدان انقلاب. خیابان انقلاب. خیابان دانشگاه. پلاک ۱۲۶.	
تلفن: ۰۲۱۶۱۲۶	
«کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر محفوظ می باشد»	

ISBN 978-622-05-0894-6



9

786220

508946

فهرست مطالب

I	فهرست مطالب
IV	لیست تصاویر
VI	لیست جداول
۱	۱ حسابان کسری
۳	۱.۱ تابع گاما
۳	۲.۱ برخی خواص تابع گاما
۵	۳.۱ تعریف اویلر از حسابان کسری
۵	۴.۱ مشتق کسری برخی توابع خاص
۸	۵.۱ انتگرال و مشتق کسری
۹	۶.۱ خواصی از انتگرال و مشتق کسری
۱۰	۷.۱ انتگرال‌های کسری ریمان-لیوویل
۱۱	۸.۱ مشتقات کسری ریمان-لیوویل
۱۱	۹.۱ مشتقات کسری کاپوتو
۱۲	۱۰.۱ انتگرال کسری و مشتق کسری روی سری توابع
۱۲	۱۱.۱ رابطه میان مشتقات کسری کاپوتو و ریمان لیوویل
۱۴	۱۲.۱ فضای توابع اندازه‌پذیر لیگ با مقادیر مختلط $(L_p(a, b))$
۱۴	۱۳.۱ فضای توابعی با مشتقات پیوسته $[AC^m(a, b)]$
۱۴	۱۴.۱ خاصیت فضای $[AC^m(a, b)]$
۱۵	۱۵.۱ مشتقات کسری کاپوتو برای توابع متعلق به فضای $[AC^m(a, b)]$
۱۶	۱۶.۱ مشتق و انتگرال کسری توابع توانی $(x-a)^{\alpha-1}$
۱۸	۱۷.۱ توابع تحلیلی
۱۸	۱۸.۱ قوانین لایبنیتز
۱۹	۱۹.۱ مشتقات کسری گرانوالد-لشکف
۲۶	۲۰.۱ انتگرال و مشتق کسری رابنس
۲۸	۲۱.۱ تبدیل لاپلاس
۳۰	۲۲.۱ تابع میتگ-لفلر

۳۳	حساب تغییرات کسری	۲
۳۳	۱.۲ ماکسیمم و مینیمم یک تابع	
۳۵	۲.۲ قضایای تیلور	
۳۵	۳.۲ تابعک	
۳۶	۴.۲ مسأله اساسی حساب تغییرات	
۴۰	۱.۴.۲ شرط مرتبه اول جهت اکسترمم یک تابعک	
۴۰	۲.۴.۲ شرایط مرتبه دوم جهت اکسترمم یک تابعک (آزمون لژاندر)	
۴۱	۳.۴.۲ معادله اویلر-لاگرانژ (شرط لازم جهت اکسترمم)	
۴۳	۴.۱.۲ مسأله براجیستاجرون	
۴۵	۵.۲ مسائل اکسترمم سازی مقید	
۴۶	۶.۲ تکلیف ضریب لاگرانژ	
۴۷	۷.۲ مسأله که در آن نقاط پایانی ثابت نیستند	
۵۱	۸.۲ ساده ترین مسأله تغییراتی شامل مشتقات کسری ریمان-لیوویل	
۵۴	۱.۸.۲ مسأله تغییراتی شامل مشتقات ریمان-لیوویل در حالت $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^1$ و نقاط پایانی ثابت	
۵۴	۲.۸.۲ مسأله تغییراتی شامل مشتقات ریمان-لیوویل با توابع متعدد و نقاط انتهایی ثابت	
۵۵	۳.۸.۲ مسأله لاگرانژ شامل مشتقات کسری ریمان-لیوویل و قانون ضریب	
۵۸	۹.۲ ساده ترین مسأله تغییرات کسری شامل مشتقات کاپوتو	
۶۰	۱.۹.۲ مسأله تغییرات کسری شامل مشتقات کاپوتو و نقاط پایانی نامعین	
۶۲	۲.۹.۲ مسأله تغییراتی شامل مشتقات کاپوتو در حالت $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^1$ و توابع متعدد	
۶۲	۳.۹.۲ مسأله تغییراتی تابعکی با توابع متعدد همراه با مشتقات کاپوتو از مرتبه دلخواه و شرایط مرزی	
۶۲	مرکب	
۶۳	۴.۹.۲ مسأله تغییراتی تابعکی شامل یک تابع و مشتقات کسری $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^1$	
۶۵	مسأله تغییراتی شامل مشتقات کاپوتو و $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^1$	
۶۶	۵.۹.۲ مسأله تعمیم یافته لاگرانژ و قانون ضریب	
۶۹	۱۰.۲ تقریبات مشتقات کسری	
۷۰	۱.۱۰.۲ فرمول های بسط جهت تقریب مشتقات کسری	
۷۰	۲.۱۰.۲ تقریب به وسیله مجموعه ای از مشتقات مرتبه صحیح	
۷۲	۳.۱۰.۲ تقریب به وسیله گشتاور یک تابع	
۷۳	۴.۱۰.۲ تقریب مشتقات کسری ریمان-لیوویل	
۷۳	تقریب مشتق کسری ریمان-لیوویل چپ	
۷۶	تقریب مشتق کسری ریمان-لیوویل راست	
۷۷	۵.۱۰.۲ تخمین خطا	
۷۹	۶.۱۰.۲ محاسبات عددی مشتقات کسری	
۸۳	۷.۱۰.۲ اطلاعات جدولی مشتقات کسری	
۸۵	۸.۱۰.۲ جواب عددی معادلات دیفرانسیل کسری	
۸۷	۹.۱۰.۲ کاربرد در حساب تغییرات کسری	

۸۹		۱۰.۱۰.۲ جواب‌های عددی مثال (۱۵.۲)
۸۹		بسط جهت مراتب صحیح
۹۰		بسط از طریق گشتاورهای یک تابع
۹۱		۱۰.۱۰.۲ جواب‌های عددی مثال (۱۶.۲)
۹۲		بسط به مراتب صحیح
۹۲		بسط از طریق گشتاورهای یک تابع
۹۳		تقریب مشتقات کسری کاپوتو

www.ketab.ir

پیش‌گفتار

در این کتاب به بیان برخی تعاریف و قضایای اساسی حسابان کسری^۱ و حساب تغییرات کسری^۲ می‌پردازیم و نتایج مهم را در این زمینه می‌آوریم. همچنین مسائل و مثالهایی را جهت تسهیل امر یادگیری حل می‌کنیم که اثر مثبتی را روی خوانندگان خواهد داشت. حسابان کسری شاخه‌ای قدیمی از ریاضیات است که به انتگرال‌ها و مشتقات از مرتبه غیر صحیح مربوط می‌شود و پیدایش آن به سه قرن پیش برمی‌گردد. نام چندین تن در ارتباط با حسابان کسری آورده شده که از این میان می‌توان به ال^۳ هوییتال،^۴ اویلر،^۵ لاپلاس،^۶ فوریه،^۷ ابل،^۸ لیوویل،^۹ ریمان،^{۱۰} ویل،^{۱۱} و کاپوتو^{۱۲} (به ترتیب تاریخی) اشاره نمود [۴۴]. حساب تغییرات نیز شاخه‌ای قدیمی از ریاضیات است که به وسیله مسائل جهان واقعی ایجاد گردیده و توسعه آن در ارتباط مستقیم با مسائل گوناگونی است که در زیست‌شناسی، شیمی، تئوری کنترل، دینامیک، اقتصاد، مهندسی، فیزیک و غیره پدید می‌آید. نتونارد اویلر^{۱۳} (۱۷۰۷-۱۷۸۳) و جوزف لویی لاگرانژ^{۱۴} (۱۷۳۶-۱۸۱۳) بنیانگذاران حساب تغییرات بودند. نام این حوزه توسط اویلر Variationum Calculi Elementa نامیده شد و سپس توجه شایانی در این زمینه صورت گرفت که شامل^{۱۵} معادله کونی بر اساس روش‌های آنالیز مدرن بود [۴۴]. تئوری حساب تغییرات کسری نیز در سال (۱۹۹۶) با کار ریو^{۱۶} برای تعمیم سیستم‌های غیر ثابت در مکانیک شروع شد [۴۴].

این کتاب مقدمه‌ای است به کار خدای که می‌خواهد به تحقیق و مطالعه در زمینه کنترل بهینه بپردازد یا مطالعه در مبحثی که در آن از روش‌ها و مفاهیم حسابان کسری و حساب تغییرات کسری استفاده شده است. با بیان این تاریخچه مختصر از شما خوانندگان عزیز درخواست می‌کنم که با ارائه انتقادات و پیشنهادها از طریق آدرس ایمیل mohamadi-math۰۱@gmail.com ما را در بهبود مطالب این کتاب یا ویرایش آنها در چاپ‌های بعدی یاری نمایید.

در پایان شایسته می‌دانم که از زحمات تمام کسانی که در سنجش و دانش بنده را جهت چاپ این کتاب یاری رساندند تشکر و قدردانی نمایم. از پدر و مادر به جهت عشق، شان، دعاهاشان، مراقبت‌ها و فداکاری‌شان، از اساتید که در طول دوران تحصیل در مسیر علم‌آموزی هدایت‌م نمودند و دوستانی که در بخش همواره شامل حال می‌شد.

مریم محمدی

^۱Fractional Calculus

^۲Fractional Calculus of Variations

^۳L'Hopital

^۴Euler

^۵Laplace

^۶Fourier

^۷Abel

^۸Liouville

^۹Riemann

^{۱۰}Weyl

^{۱۱}Caputo

^{۱۲}Leonard Euler

^{۱۳}Joseph Louis Lagrange

^{۱۴}Riewe