

مباحثی در

فضاهای هیلبرت

(همراه با مجموعه‌ای از تمرینات متنوع و حل کامل تشریحی آنها)

تألیف:

دکتر محمد فروزی

(عضو هیأت علمی دانشگاه شهید کاظمی رفسنجان)

دکتر سید علی کاظمی پور

(عضو هیأت علمی دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علی آباد کتول)



سرشناسه: فزونی، محمد، ۱۳۶۳ -

عنوان و نام پدیدآور: مباحثی در فضاهای هیلبرت همراه با مجموعه‌ای

از تمرینات متنوع و حل کامل تشریحی آن‌ها) / سیدعلی کاظمی پور،

مشخصات نشر: گرگان: نارنجستان، ۱۳۹۸

مشخصات ظاهری: ۳۵۹ ص

فروست: دانشگاهی ۳

شابک: ۷۵۰۰۰ ریال ۶-۱۰-۷۷۶۱-۶۰۰-۹۷۸

وضعیت فهرست نویسی: فیبا

یادداشت: واژه‌نامه

یادداشت: کتابنامه

یادداشت: نمایه

موضوع: فضای هیلبرت

Hilbert space موضوع:

شناسه افزوده: کاظمی پور، سیدعلی، ۱۳۵۴-

رده‌بندی کنگره: QA ۳۲۲/۴

رده‌بندی دیویی: ۵۱۵/۷۳۳

شماره کتابشناسی ملی: ۶۰۲۹۹۳۱

عنوان اثر: مباحثی در فضا‌های هیلبرت پدیدآورندگان: محمد فزونی، سیدعلی کاظمی‌پور
ناشر: نارنجستان مدیرنشر: هدایت اله امینیان طراح جلد: الهام ایل قطع: وزیری نوبت چاپ: اول
سال چاپ: ۱۳۹۸ چاپ: تریحانی (بارچیان) شمارگان: ۵۰ نسخه شابک: ۶-۱۰-۷۷۶۱-۶۰۰-۹۷۸
قیمت: ۷۵۰۰۰ تومان



این اثر تحت پوشش قانون حمایت از حقوق مؤلفان و مصنفان ایران قرار دارد و تمامی حقوق این اثر محفوظ است و تکثیر یا بازتولید آن، کلاً یا جزئاً، به هر صورت و یا شکلی از جمله چاپ، فتوکپی، صوت، تصویر، فیلم، انیمیش و نیز انتشار نسخه‌ی الکترونیک، بدون اجازه‌ی مکتوب از نویسندگان ممنوع است و متخلف تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرد.

گرگان، خیابان امام خمینی، آفتاب چهاردهم، ساختمان شیرنگی، طبقه دوم

Instagram: @irnarenjestan

تلفن: ۰۱۷-۳۳۲۹۰۱۰۳ همراه: ۰۹۱۱۳۷۱۵۷۳۲۲

پیش‌گفتار

در اوایل قرن بیستم میلادی، ریاضیدان بزرگ آلمانی، دیوید هیلبرت، متوجه شد که تعدادی از استدلال‌های مهم در ریاضیات ساختار مشابهی دارند. در واقع، او به این نکته که تمام این استدلال‌ها را می‌توان یکسان محسوب کرد، پی‌برد. این ملاحظه و دقت آن دانشمند و بررسی‌های مشابه دیگر، به ایجاد شاخه جدیدی از ریاضیات منجر شد و یکی از مفاهیم بنیادی این شاخه به نام هیلبرت نام‌گذاری شد. مفهوم فضای هیلبرت تأثیر بزرگی بر ریاضیات جدید، از نظریه اعداد گرفته تا مکانیک کوانتوم، گذارد، که اگر دست کم مقدمات نظریه فضای هیلبرت را ندانید، نمی‌توانید ادعا کنید که ریاضی‌دان آموزش‌دیده‌ای هستید یا با اصول اولیه علوم مهندسی آشنایی دارید.

اما فضای هیلبرت چیست، چگونه می‌توان درکی از آن داشت و به کاربردهایی از آن رسید؟ در اکثر دوره‌های دانشگاه، ابتدا با ریاضیات، درسی هست که در آن فضای هیلبرت به عنوان یک فضای ضرب داخلی کامل معرفی می‌شود که در این کتاب نیز در فصل دوم آن را آورده‌ایم و فرض بر این است که دانشجوی حاضر را با مخاطب این کتاب، در چنین دوره‌ای، از درس‌های قبل می‌داند که فضای ضرب داخلی، فضایی است که مجهز به یک ضرب داخلی است. در این کتاب فضاهای هیلبرت از منظر آنالیز تابعی و به صورت اصل موضوعی ارائه خواهد شد. یعنی از ابتدائی‌ترین تعاریف به همراه قضایا و مثال‌های مرتبط شروع می‌کنیم و سپس به ساختارهایی مانند عملگرها روی فضاهای هیلبرت و انواع مختلف آن و طیف‌ها و مربوط و تجزیه‌های ممکن خواهیم پرداخت.

در این مجموعه، ابتدا در فصل اول، اندکی از استاد بزرگ، هیلبرت و برخی از نتایج آورده‌ایم صحبت خواهیم کرد و سپس سیری تاریخی از علل معرفی فضاهای هیلبرت و برخی از کاربردهای آن را خواهیم گفت. در ادامه فصل که با نوعی انتزاع و مجردنگری سروکار دارد، به مفاهیمی مانند فضاهای برداری و نرم‌دار پرداخته که معمولاً در ابتدای کتاب‌های آنالیز ریاضی و جبر خطی ظاهر می‌شوند و برای مخاطب آشناتر هستند.

با معرفی فضاهای ضرب داخلی و نرم حاصل از آن در فصل دوم، و بعد از ارائه نامساوی کوشی-شوارتز، فضای هیلبرت را تعریف می‌کنیم و قضایای مرتبط با فضاهای هیلبرت را ارائه

می‌دهیم.

در فصل سوم، مفهوم عملگر روی فضاهاى هیلبرت و دوگان آنها را توضیح می‌دهیم و با ارائه‌ی مثال‌های متنوع و غنی، خواننده را در سیر درک متفاوتی از فضاهاى هیلبرت قرار می‌دهیم. خواننده‌ای که کتاب‌های دیگر در این زمینه را مطالعه کرده باشد با خواندن این فصل متوجه تفاوت این کتاب با سایر مجموعه‌های مورد مطالعه‌اش می‌گردد.

در فصل چهارم کار را با معرفی طیف و مقدارویژه آغاز می‌کنیم. پس از آن، به موضوعات خاص‌تری می‌پردازیم و رده‌بندی دقیق‌تری از طیف‌ها را ارائه می‌کنیم.

در فصل پنجم به ترتیب به ارائه‌ی مسائل و حل تشریحی کامل آن‌ها پرداخته‌ایم که بیشتر در مورد ریزمیدانها مابین ریاضی‌خوان‌ها. بنابراین، روح این فصل تا حدی متفاوت از بقیه کتاب است.

در برخی از موارد در اثبات قضایا یا نکاتی که بعد از تعاریف نوشته‌ایم، از واژه "چرا؟" استفاده نموده‌ایم که به عقیده اکثر دانش‌پژوهان، اگر سعی نمائید تا به این چراها پاسخ دهید، درکی بهتر از موضوع خواهید یافت. هم‌چنین در مورد نکات را با علامت * و بدون شماره آورده‌ایم که هدف از این نکات، ذکر مفاهیم پیشرفته‌تر پژوهشی مرتبط با فضاهاى هیلبرت می‌باشد، هرچند که به دلیل جلوگیری از حجم بالا، به بسیاری دیگر از موضوعات پژوهشی در زمینه و یا مرتبط با فضاهاى هیلبرت، اشاره‌ای نکرده‌ایم.

بر خود لازم می‌دانیم که از سرکار خانم دکتر فرخنده تخته، مسئولیت علمی دانشگاه خلیج فارس به جهت آماده نمودن متنی در خصوص کاربرد فضاهاى هیلبرت در معانی تنه‌ای قاب‌ها بما، نهایت تشکر و قدردانی را به عمل آوریم. یکی دیگر از عزیزانی که ما را در رفع ایرادات مربوط به تایپ کتاب با نرم‌افزار تک‌استودیو یاری نمودند، جناب آقای دکتر مهدی شاهینی، از همکارانمان در دانشگاه گنبد هستند که علی‌رغم مشغله‌های فراوان، همواره نسبت به ما و این کار، الطاف فراوانی را لحاظ فرمودند، که بدین وسیله بهترین‌ها را برای ایشان آرزو نمودیم.

هم‌چنین شایسته است که از شورای انتشارات دانشگاه گنبد کاووس به جهت انجام کلیه امور مرتبط با داوری و چاپ این اثر و هم‌چنین از داوران محترم و اساتید گران‌قدری که زحمت داوری را به عهده گرفتند و ما را با نظرات بسیار مفید و سازنده‌شان یاری نمودند، تشکر و قدردانی نمائیم.

همانند هر اثر دیگری، این کتاب نیز قطعاً خالی از ایراد و اشکال نیست، هرچند که مؤلفین تمام تلاش‌شان را نموده‌اند که این اثر، از لحاظ علمی، ترتیب ارائه مطالب، فارسی‌نویسی صحیح و بسیاری از موارد دیگر، دارای کمترین اشکال باشد. البته لازم به ذکر است که دست‌نویس ابتدایی این کتاب، در سال ۱۳۸۸ به اتمام رسید و نگارندگان قصد آن را داشتند که در سال ۱۳۸۹، این مجموعه را به چاپ رسانند، اما بنا به دلایلی موفق به این کار نشدند. بعد از آن، در حدود هفت سال، کتاب حاضر در صفحه شخصی ایشان قرار داده شد و در این مدت از نظرات سایر همکاران و دوستان، استه‌دهای فراوانی شد. مجدداً، در سال ۱۳۹۷ مؤلفین بعد از ویرایش دوباره، تصمیم به چاپ این اثر گرفتند.

امید است که این اثر، مورد توجه و استفاده علاقمندان و پژوهشگران در این حوزه واقع شود. در پایان از دوستان و خوانندگان محترم و گرامی، خواهشمند است که در صورت مطالعه و برخورد با هرگونه ایراد و اشکال علمی و فنی، با در صورت داشتن نظرات سازنده، ما را از طریق ایمیل fozouni@hotmail.com مطلع کنند که پیشاپیش کمال امتنان و سپاس را از این لطف خطیر جناب‌عالی داریم.

محمد فزونی

دانشگاه گنبدکاووس

سید علی کاظمی‌پور

دانشگاه آزاد اسلامی - واحد علم آباد کتول

پائیز ۱۳۹۸

فهرست مطالب

۱	مقدمات	۱
۱	۱.۱ سیر تاریخی فضاهای هیلبرت	۱
۶	۲.۱ تعاریف مقدماتی	۶
۱۳	۲ فضاهای هیلبرت	۱۳
۱۳	۱.۲ فضاهای ضرب داخلی	۱۳
۲۹	۲.۲ مجموعه‌های یکامتعامد	۲۹
۵۱	۳.۲ مجموعه‌های یکامتعامد کامل و قضیه ساختار	۵۱
۷۲	۴.۲ نمایش تابعک‌های خطی	۷۲
۸۰	۵.۲ توپولوژی ضعیف و ضعیف-ستاره	۸۰
۸۵	۳ عملگرهای کران‌دار روی فضاهای هیلبرت	۸۵
۸۵	۱.۳ فضای $B(H)$ و الحاقی‌ها	۸۵
۹۴	۲.۳ عملگرهای خودالحاق، نرمال و یک‌کاه	۹۴
۱۱۶	۳.۳ عملگرهای تصویری	۱۱۶
۱۲۶	۴.۳ عملگرهای فشرده	۱۲۶
۱۳۴	۵.۳ توپولوژی‌های $B(H)$	۱۳۴

۱۳۹	۴	نظریه طیفی فضاهاى هیلبرت
۱۳۹	۱.۴	مقدار ویژه و طیف یک عملگر
۱۴۷	۲.۴	طیف یک عملگر نرمال
۱۶۱	۳.۴	طیف و انواع آن
۱۷۰	۴.۴	طیف عملگرهای فشرده و نرمال
۱۸۶	۴	تجربه طیفی عملگرهای فشرده
۱۹۳	۵	مسائل
۲۱۷	۶	حل مسائل
۳۴۵		واژه نامه فارسی به انگلیسی
۳۵۳		کتاب نامه
۳۵۷		نمایه