

۱۵۸۳۸۱۲

مباحث و مسائلی در نظریه گروه‌ها

دکتر بهروز میرزایی

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر
دانشگاه سائو پائولو

دکتر سید محمد غلامزادگان محمودی

دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف



مؤسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف



مؤسسه انتشارات علمی
دانشگاه صنعتی شریف

مباحث و مسائلی در نظریه گروه‌ها

تألیف سید محمد غلامزاده و حمید میرزی

طراحی جلد: الهه احمدی میرقائد

مؤسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، تهران

چاپ اول: ۱۳۹۶

شمارگان: ۱۰۰۰

بها: ۱۸۰۰۰ تومان

حق چاپ برای مؤسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف محفوظ است.

ISBN 978-964-208-202-5

شابک: ۹۷۸-۹۶۴-۲۰۸-۲۰۲-۵

تلفن: ۶۴۰۷۰، ۶۴۱۶۲، ۶۶۱۳۹-۶۶۰۱۳۱۳۹

دفتر مرکزی: خیابان آزادی - دانشگاه صنعتی شریف

دفتر فروش: میدان انقلاب - خیابان شهید منیری جاوید (اردیبهشت) - ساختمان بهمن - پلاک ۱۷ - طبقه چهارم - واحد ۴۰۲

تلفن: ۶۶۴۰۵۱۳۲-۶۶۹۶۷۸۹۶

پست الکترونیکی: publishing@sharif.ir

وبگاه: http://sina.sharif.ir/~publishing

فروش اینترنتی: www.saneibook.com, www.ketabiran.ir

موضوع: نظریه گروه‌ها - مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالی)	سرشناسه: غلامزاده محمودی، سید محمد ۱۳۵۴
موضوع: (Higher) Group theory-Problems, exercises, etc	عنوان و نام‌پدیدآور: مباحث و مسائلی در نظریه گروه‌ها/ تألیف سید محمد غلامزاده محمودی، بهروز میرزی
شناسه افزوده: میرزی، بهروز، ۱۳۵۱	موضوع: نظریه گروه‌ها - راهنمای آموزشی (عالی)
شناسه افزوده: دانشگاه صنعتی شریف، مؤسسه انتشارات علمی	موضوع: نظریه گروه‌ها - راهنمای آموزشی (عالی)
شناسه افزوده: Sharif University of Technology, Institute of Scientific Publications	موضوع: نظریه گروه‌ها - راهنمای آموزشی (عالی)
رده‌بندی کنگره: ۱۳۹۶ م ۲ غ/ ۱۷۴/ ۲ QA۱۷۴/ ۲	موضوع: نظریه گروه‌ها - راهنمای آموزشی (عالی)
رده‌بندی دیویی: ۵۱۲/ ۲۰۷۶	موضوع: نظریه گروه‌ها - راهنمای آموزشی (عالی)
شماره کتابشناسی ملی: ۳۹۹۴۸۳۳	موضوع: نظریه گروه‌ها - راهنمای آموزشی (عالی)

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست مطالب

پیشگفتار	هفت
۱ گروه و زیرگروه	۱
۱.۱ نیم گروه	۱
۲.۱ گروه	۴
۳.۱ زیرگروه	۱۰
۴.۱ هم دسته	۱۲
۵.۱ مرتبه عناصر در یک گروه	۱۶
۶.۱ زیرگروه های نرمال و گروه خارج قسمت	۱۸
۷.۱ مجموعه های مولد در گروه ها	۲۶
۸.۱ زیرگروه جابه جا گر ها (زیرگروه مشتق)	۲۸
۹.۱ زیرگروه های ماکسیمال	۳۲
۱۰.۱ مرکز ساز، نرمال ساز	۳۵
۱۱.۱ مسائل	۳۷
۱۲.۱ منابعی برای مطالعه بیشتر	۴۱
۲ همریختی و خودریختی	۴۵
۱.۲ همریختی گروهی	۴۶
۲.۲ هسته و تصویر یک همریختی، قضایای یکرختی	۴۸

۵۴	گروه‌های دوری	۳.۲
۶۱	گروه خودریختی‌ها	۴.۲
۶۴	همریختی‌ها و خودریختی‌های گروه‌های آبدی	۵.۲
۷۱	مسائل	۶.۲
۷۳	منابعی برای مطالعه بیشتر	۷.۲

۷۵	گروه‌های جایگشتی	۳
۷۶	گروه متقارن	۱.۳
۷۷	قضیه کیلی	۲.۳
۸۰	جایگشت‌های دوری، ترانهش‌ها و علامت یک جایگشت	۳.۳
۸۶	گروه متناوب	۱.۳
۹۱	مسائل	۵.۳
۹۲	منابعی برای مطالعه بیشتر	۶.۳

۹۳	گروه دووجهی	۴
۹۳	گروه تقارن‌های چرخش‌ها و منتظم	۱.۴
۹۹	گروه دووجهی به عنوان گروه سیمپل	۲.۴
۱۰۵	مسائل	۳.۴
۱۰۵	منابعی برای مطالعه بیشتر	۴.۴

۱۰۷	عمل گروه	۵
۱۰۷	مدار و ثابت نگه‌دارنده	۱.۵
۱۱۰	معادله رده‌ای و قضیه نقطه ثابت	۲.۵
۱۱۲	چند کاربرد از عمل گروه	۳.۵
۱۱۶	لم برنساید	۴.۵
۱۱۸	مسائل	۵.۵
۱۱۹	منابعی برای مطالعه بیشتر	۶.۵

۱۲۱	قضایای سیلو و قضیه برنساید	۶
۱۲۲	قضایای سیلو	۱.۶
۱۲۵	گروه‌های از مرتبه pq	۲.۶

۳.۶	ترانسفر و قضیه برنساید	۱۲۸
۴.۶	مسائل	۱۳۲
۵.۶	منابعی برای مطالعه بیشتر	۱۳۶

۷ گروه‌های حل‌پذیر و پوچ‌توان و قضیه ژوردان-هولدر

۱.۷	گروه‌های حل‌پذیر	۱۳۸
۲.۷	گروه‌های پوچ‌توان	۱۴۱
۳.۷	قضیه ژوردان-هولدر	۱۵۰
۴.۷	مسائل	۱۵۳
۵.۷	منابعی برای مطالعه بیشتر	۱۵۴

۸ گروه‌های آبلی

۱.۸	گروه‌های آر متناهی‌تولیدشده	۱۵۶
۲.۸	گروه‌های آبلی بخش‌پذیر	۱۶۵
۳.۸	گروه‌های آبلی آر	۱۷۳
۴.۸	مسائل	۱۷۵
۵.۸	منابعی برای مطالعه بیشتر	۱۷۸

۹ حل مسائل

منابع

فهرست نمادها

فهرست راهنما

پیشگفتار

گروه‌ها یکی از بنیادی‌ترین ساختارها در ریاضیات هستند. این ساختارها ارتباطی جدایی‌ناپذیر با مفهوم تقارن در هندسه دارند. برای مثال مجموعه همه تقارن‌های یک مربع و مکعب در فضا به ترتیب گروه‌های ۸ و ۲۴ عضوی هستند.

گالوا ریاضیدان فرانسوی، به عنوان یکی از بنیانگذاران نظریه گروه‌ها تلقی می‌شود. او از گروه‌ها برای مطالعه حل پذیری چندجمله‌ای‌ها، یک متغیره به وسیله رادیکال‌ها استفاده کرد، یعنی اینکه بتوان ریشه‌های یک چندجمله‌ای را با فرمولی بر حسب ضرایب آن چندجمله‌ای و جمع و ضرب و تفریق و تقسیم و رادیکال‌گیری به دست آورد. مانند فرمول آشنای

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

که ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را بیان می‌کند. سالیان بعد، فرمولی، اما پیچیده‌تر، برای معادلات درجه سوم و چهارم هم وجود دارد. سؤالی که از قرن پانزدهم و شانزدهم میلادی مطرح بود این بود که آیا برای معادلات با درجات بالاتر هم چنین فرمول‌هایی وجود دارد. در سال ۱۷۹۹، روفینی ریاضیدان و فیلسوف ایتالیایی، یک اثبات برای عدم وجود چنین فرمول‌هایی برای معادلات عمومی از درجه پنج به بالا ارائه کرد. اثبات روفینی گاهی ناکامل تلقی می‌شود. اولین اثبات کامل از این قضیه توسط آبل، ریاضیدان نروژی تحت عنوان «رساله در باب معادلات جبری» [۱] در سال ۱۸۲۴ به زبان فرانسوی چاپ شد. بعداً این رساله با جزئیات بیشتر در سال ۱۸۲۶ در اولین شماره ژورنال کرله^۱ به چاپ رسید. این قضیه

عدم وجود، گاهی تحت عنوان قضیه آبل-روفینی معروف است. اما معادلات چندجمله‌ای خاصی از درجه پنج به بالا هم وجود دارند که ریشه‌های آنها توسط رادیکال‌ها قابل بیان هستند. این سؤال هنوز مطرح بود که چه چندجمله‌ای‌هایی توسط رادیکال‌ها قابل حل هستند. گالوا، به هر چندجمله‌ای با ضرایب گویا یک گروه نسبت داد. این گروه، امروزه تحت عنوان گروه گالوا شناخته می‌شود. او نشان داد که یک چندجمله‌ای به وسیله رادیکال‌ها حل پذیر است اگر و تنها اگر گروه گالوای آن دارای ساختار خاصی باشد. چنین گروه‌هایی بعدها تحت عنوان گروه‌های حل پذیر شناخته شدند. در این کتاب، این گروه‌ها در فصل هفت مورد بررسی قرار می‌گیرند.

گرچه گروه‌هایی که در کارهای گالوا ظاهر می‌شدند همگی گروه‌های جایگشتی بودند و در آن زمان گروه‌ها به صورتی که امروزه تعریف و مطالعه می‌شوند ناشناخته بودند، ولی نتایج گالوا منجر به تولد نظریه گروه‌ها و نظریه میدان‌ها شد. برای آشنایی با نظریه میدان‌ها خواننده می‌تواند به مراجعه به [۲۶] ازجمله مرجع مراجعه کند.

گرچه ریاضدانان قبل از گالوا و یا معاصر با وی مانند لاگرانژ، روفینی، آبل، کوشی و ... با بعضی از گروه‌ها (به اصطلاح گروه‌های جایگشتی) آشنا بودند، ولی اهمیت گروه‌ها در کارهای گالوا هویدا شد. سلمه خرو» برای اولین بار به وسیله گالوا مورد استفاده قرار گرفت. گرچه مفاهیمی بنیادی مانند زیرگروه، نرمال، گروه ساده و ... در کارهای گالوا به طور ضمنی ظاهر شدند، اما سالها گذشت تا صریحاً آنها به طور صریح در ریاضیات وارد شد. تعریف گروه آن طوری که امروزه به کار برده می‌شود در اواخر قرن نوزدهم توسط آرتور کیلی ارائه شد. معرفی گروه‌ها باعث تحولی شگرف در ریاضات شده است. امروزه کمتر شاخه ریاضی وجود دارد که در آن از مفهوم گروه استفاده نشده باشد یا نظریه گروه‌ها روی آن تأثیر نگذاشته باشد. ما در این کتاب به معرفی و مطالعه مقدماتی گروه‌ها می‌پردازیم. اعتقاد ما بر این است که آشنایی پیدا کردن و یادگیری مفاهیم ارائه شده در این کتاب به نفع بنیادی بودن آنها، برای علاقه‌مندان ریاضیات محض، به ویژه شاخه جبر، دارای اهمیت است.

فصل ۱ را با معرفی و مطالعه نیم گروه‌ها و گروه‌ها شروع می‌کنیم و سپس به مطالعه انواع زیرگروه‌های یک گروه می‌پردازیم. گروه‌هایی مانند گروه‌های دوری، گروه‌های متناهی تولید شده، گروه خارج قسمت، گروه‌های آبلی و زیرگروه‌هایی مانند زیرگروه نرمال، زیرگروه ماکسیمال، زیرگروه تولید شده به وسیله یک زیرمجموعه، نرمال ساز و مرکز ساز یک زیرمجموعه، زیرگروه جابه‌جاگر ازجمله مباحث این فصل هستند. در این فصل چندین قضیه اساسی گروه‌ها مانند قضیه لاگرانژ، قضیه پوانکاره و قضیه تناظر را ثابت می‌کنیم.

فصل ۲ به مطالعه همریختی‌ها و خودریختی‌های بین گروه‌ها اختصاص داده شده است.

همریختی‌های گروهی به ما اجازه می‌دهند که گروه‌ها را با هم مقایسه کنیم. در این فصل قضایای یکریختی را اثبات و گروه‌های دوری را دسته‌بندی خواهیم کرد. گروه خودریختی‌های یک گروه، یعنی مجموعه همه یکریختی‌های از آن گروه به خودش با قانون ترکیب توابع، گروه بسیار مهمی است. در این فصل رابطه بین یک گروه و گروه خودریختی‌هایش را بررسی و در انتها گروه خودریختی‌های گروه‌های آبدی را مطالعه خواهیم کرد.

در فصل ۳ گروه‌های جایگشتی را مطالعه می‌کنیم. جایگشت مفهومی کهن در ریاضیات است و مطالعه گروه‌های جایگشتی نسبت به گروه‌های مجرد از قدمت بیشتری برخوردار است. در واقع اولین گروه‌هایی که در ریاضیات وارد شدند گروه‌های جایگشتی بودند. با اینکه جایگشت‌ها اشیاء ملموسی هستند و محاسبه با آنها عملی‌تر است، اما قضیه کیلی نشان می‌دهد که مطالعه این گروه‌ها به اندازه گروه‌های مجرد دشوار است. بنابر قضیه کیلی هر گروه متناهی را می‌توان در یک گروه جایگشتی نشان داد. هدف اصلی این فصل مطالعه ساختاری گروه متقارن S_n و گروه متناوب A_n است.

در فصل ۴ بحث در مورد گروه‌های دووجهی را بررسی می‌کنیم. مجموعه همه حرکات صلب یک جسم در فضا تشکیل یک گروه می‌دهد. گروه دووجهی D_n مجموعه همه حرکات صلب یک n -ضلعی منتظم است. بسیاری از خواص مهم این گروه‌ها در این فصل مورد مطالعه قرار می‌گیرند. همچنان که خواهیم دید این گروه‌ها ساختار نسبتاً ساده‌ای دارند و ملموس بودن آنها شده و روی ز گروه‌های مجرد به دست می‌دهد.

مطالعه عمل یک گروه روی یک مجموعه روشی بسیار مهم برای مطالعه گروه‌ها است. موضوع فصل ۵ مطالعه این روش است. کاربردهایی که از مباحث این فصل ارائه می‌دهیم، اهمیت این روش را نشان خواهد داد. یکی از کاربردهای مهم عمل یک گروه روی یک مجموعه در فصل ۶ و در اثبات قضایای سیلو آمده است.

فصل ۶ به قضایای سیلو و کاربردهای آنها اختصاص داده شده است. این قضایا بخشی جدایی‌ناپذیر از نظریه گروه‌های متناهی هستند و کاربردی بنیادی در دسته‌بندی گروه‌های ساده متناهی دارند. به عنوان یک کاربرد ساده از این قضایا، همه گروه‌های از p و q که p و q دو عدد اول متمایز هستند، را دسته‌بندی خواهیم کرد. همچنین در انتهای این فصل قضیه‌ای بسیار کاربردی از برنساید در ارتباط با زیرگروه‌های سیلو ارائه خواهیم داد.

در حدود سال‌های ۱۸۳۲-۱۸۳۰، گروه‌های حل‌پذیر توسط گالوا در مطالعه حل‌پذیری چندجمله‌ای‌های یک‌متغیره، به طور طبیعی معرفی شدند. گالوا نشان داد که یک چندجمله‌ای به وسیله رادیکال‌ها قابل حل شدن است اگر و فقط اگر گروه گالوای این چندجمله‌ای حل‌پذیر باشد. این نتیجه گالوا منجر به انقلابی در ریاضیات شد و یکی از نتایج بارز آن تولد نظریه

گروه‌ها است. ما فصل ۷ را با مطالعه گروه‌های حل‌پذیر شروع می‌کنیم. سپس به مطالعه گروه‌های پوچ‌توان می‌پردازیم. گرچه گروه‌های پوچ‌توان رده بسیار خاصی از گروه‌های حل‌پذیر هستند و امروزه تقریباً همه کتاب‌های مرتبط با نظریه گروه‌ها بخشی از خود را به مطالعه آنها اختصاص می‌دهند، ولی جالب است بدانید که این گروه‌ها برای اولین بار، حدود صد سال بعد از گروه‌های حل‌پذیر معرفی شدند. این فصل را با اثبات قضیه بنیادی ژوردان-هولدر به انتها می‌رسانیم.

در فصل ۸ گروه‌های آبلی را مطالعه می‌کنیم و هدف اصلی رده‌بندی دو دسته از گروه‌های آبلی است. دسته اول، دسته گروه‌های آبلی متناهی‌تولیدشده و دسته دوم، دسته گروه‌های بخش‌پذیر است. گروه‌های آبلی را می‌توان «فضاهای برداری» روی حلقه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ نیز نامید. البته این ساختارها در ریاضیات، $\mathbb{Z}$ -مدول نامیده می‌شوند. برای مطالعه نظریه مدول‌ها روی حلقه‌های یکدانه، بخوانید «خواننده علاقه‌مند را به کتاب [۱۰] ارجاع می‌دهیم.

به نظر ما، بدین ترتیب مسائل، یک مفهوم ریاضی به‌سختی در ذهن نهادینه می‌شود و خیلی زود فراموش خواهد شد. لذا تمهیداتی در این کتاب گنجانده‌ایم. پیشنهاد ما این است که خواننده علاقه‌مند سعی کند تعداد قابل توجهی از آنها را حل کند. همچنین در انتهای هر فصل مسائلی آورده شده‌اند که راه‌حل آنها در انتهای کتاب ارائه شده است. توصیه ما این است که حتی برای این مسائل، خواننده بلافاصله سراغ راه‌حل آنها نرود و برای حل آنها جدیت به خرج دهد.

سعی ما در این کتاب بر این بوده که، با توجه به تجربه‌های خود، تا حد امکان برای قضایا و مسائل طبیعی‌ترین راه حل‌ها را که خود قادر به پیدا کردن آن هستیم، ارائه دهیم. در مورد قضایای سخت‌تر و عمیق‌تر تلاش کرده‌ایم که ساده‌ترین راه حل را ارائه دهیم.

نویسندگان از همه نظرات، پیشنهادها و تصحیحات با کمال میل استقبال می‌کنند. این موارد می‌توانند از طریق ایمیل به mmahmoudi@sharif.ir یا bmirzai@cmc.usp.br ارسال شوند.

سید محمد غلامزاده محمودی، بهروز میرزایی

پاییز ۱۳۹۶