

فضاهای متریک

دکتر کوروش نورزانی
استاد دانشکده‌ی ریاضی
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی



شماره ۴۰۹

سرشناسه: نوروزی، کوروش. ۱۳۴۹-

عنوان و نام پدیدآور: فضاهاى متریک/ کوروش نوروزی.

مشخصات نشر: تهران: دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، ۱۳۹۵.

مشخصات ظاهری: ۹۱۳ص.

شابک: 978-600-7867-23-5

وضعیت فهرست نویسی: فیا

یادداشت: کتابنامه.

موضوع: فضاهاى متريک -- هنماى آموزشى (عالى)

موضوع: Metric spaces -- Study and teaching (Higher)

موضوع: دنباله‌ها (رياضيات) -- هنماى آموزشى (عالى)

موضوع: Sequences (Mathematics) -- Study and teaching

(Higher)

رده بندى کنگره: ۱۳۹۵ ف۹ن۰۸۶۱۱/۲۸

رده بندى ديويى: ۵۱۴

شماره کتابشناسى ملی: ۵۵۹۲۸۲۸

<http://press.kntu.ac.ir>



ناشر: دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

عنوان: فضاهاى متریک

تألیف: دکتر کوروش نوروزی

نوبت چاپ: اول

تاریخ انتشار: مهر ۱۳۹۵، تهران

شمارگان: ۵۰۰ نسخه

چاپ: پدیدرنگ

صحافی: گرنامی

بها: ۲۹۰۰۰ تومان

(تمام حقوق برای ناشر محفوظ است)

خیابان میرداماد غربی - پلاک ۴۷۰ - انتشارات دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی - تلفن: ۸۸۸۸۱۰۵۲

میدان ونک - خیابان ولی عصر (عج) - روبروی ساختمان اسکان - مرکز پخش و فروش انتشارات - تلفن: ۸۸۷۷۲۲۷۷

رایانامه: press@kntu.ac.ir - تارنما (فروش آنلاین): <http://press.kntu.ac.ir>

فهرست

صفحه	عنوان
۱	دبیاچه
۵	فضاهای متریک
۶	فضای متریک
۳۶	زیر فضای متریک
۳۷	مسائلی که حل شده
۴۲	تمرین ها
۴۷	دنباله ها در فضاهای متریک
۴۷	همگرایی دنباله ها
۵۴	تجدید آرایش دنباله ها، زیر دنباله ها
۵۷	دنباله های کوشی و فضاهای متریک کامل
۶۲	دنباله های دوگانه
۶۴	مسائل حل شده
۷۳	تمرین ها
۷۹	توپولوژی فضاهای متریک
۷۹	همسایگی ها
۸۰	مجموعه های بسته و باز
۸۹	مجموعه های بسته و باز در زیر فضاهای متریک
۹۲	مجموعه های کران دار
۹۵	متریک های هم ارز و هم ارز توپولوژیک
۹۷	مجموعه های چگال و فضاهای متریک جداشدنی
۱۰۲	مجموعه های بی نقص
۱۰۴	مجموعه های کانتور
۱۱۰	مسائل حل شده
۱۱۸	تمرین ها

۱۲۳	فشردگی و همبندی	فصل ۴
۱۲۳	مجموعه‌های فشرده	
۱۲۸	مجموعه‌های فشرده و پوشش‌های باز	
۱۳۰	ویژگی اشتراک متناهی	
۱۳۲	قضیه‌ی هلی	
۱۳۵	اصول شمارش‌پذیری	
۱۳۷	مجموعه‌های کران‌دار توری	
۱۴۰	مجموعه‌های همبند	
۱۴۵	مجموعه‌های همبندی	
۱۴۶	مسائل حل‌شده	
۱۵۲	تمرین‌ها	

۱۵۷	حد و پیوستگی در فضاها	فصل ۵
۱۵۷	حد تابع	
۱۶۱	پیوستگی	
۱۶۶	پیوستگی و فشردگی	
۱۶۸	پیوستگی و همبندی	
۱۷۰	فضاهای همبند مسیری	
۱۷۱	هم‌تومورفیسم‌ها	
۱۷۲	پیوستگی یک‌نواخت	
۱۸۱	پیوستگی توابع حقیقی یک‌نوا	
۱۸۴	مسائل حل‌شده	
۲۰۱	تمرین‌ها	

۲۰۵	ساخت $\mathbb{R}$ ، کامل‌سازی و فضاها	فصل ۶
۲۰۵	ساخت اعداد حقیقی با دنباله‌های کوشی	
۲۲۲	ایزومتري‌ها	
۲۲۵	کامل‌سازی فضاها	
۲۲۹	فضاهای متریک	
۲۳۵	مجموعه‌های G_δ و F_σ	
۲۳۷	نوسان تابع	
۲۳۹	مسائل حل‌شده	
۲۴۳	تمرین‌ها	

۲۴۷	دنباله‌ها و سری‌های تابعی	فصل ۷
۲۴۷	همگرایی نقطه‌وار دنباله‌های تابعی	

۲۴۸	همگرایی یکنواخت دنباله‌های تابعی
۲۵۵	همگرایی یکنواخت دنباله‌های تابعی و حد و پیوستگی
۲۵۸	همگرایی یکنواخت دنباله‌های تابعی و مشتق
۲۶۱	همگرایی نقطه‌وار و یکنواخت سری‌های تابعی
۲۶۴	فشردگی در فضای توابع پیوسته و قضیه‌ی آرزلا-آسکولی
۲۷۴	توابع پیوسته‌ی هیچ‌جا مشتق‌پذیر
۲۷۸	مثالی از یک تابع پیوسته‌ی هیچ‌جا مشتق‌پذیر
۲۸۰	قضیه‌ی استون-وایراشتراس
۲۹۲	مسائل حل‌شده
۳۰۹	تمرین‌ها

۳۱۵	مراجع
۳۱۷	واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی
۳۲۹	واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی
۳۴۳	پروژه‌ها
۳۴۵	نمایه

دیباچه

از میان رهیافت‌های گوناگون در اندیشه‌ی ریاضی، «تعمیم» یکی از بهترین آنهاست که به باور برخی قلب ریاضیات محسوب می‌شود. تعمیم در ریاضیات محض، به شکلی انتزاعی و مجرد ظهور می‌یابد و در اغلب موارد، شکل ارائه‌شده توصیف و تفسیر مناسب و شایسته‌ای از برخی پدیده‌ها در دنیای پیرامون به دست می‌دهد. اگرچه خاستگاه بسیاری از ایده‌های اساسی و بنیادی در ریاضیات به جهان واقعی بازمی‌گردد، اما به ادعایی، ریاضیات به عنوان یک ذات بی‌نیاز از جهان واقعی و خودبارور می‌تواند با اشیای انزاعی و مجرد خود، توصیفی مناسب از اشیای مشابه در جهان واقعی ارائه کند.

مفهوم متریک در آنالیز ریاضی که موضوع اصلی کتاب حاضر است، تعمیمی انتزاعی از مفهوم فاصله در حساب دیفرانسیل و انتگرال است و فضاهای متریک مدل‌های مناسبی از مجموعه‌های مجهز به یک فاصله‌اند. متریک نرمی که در آنالیز ریاضی محسوب می‌شود، با شناخت فضاهای متریک که خود در یک قالب انتزاعی بیان می‌شوند، به شناخت مفهوم مجردتر توپولوژی دست می‌یابیم. در واقع، با شناخت و درک فضاهای متریک، می‌توان به آنالیز ریاضی گسترش می‌یابد و این خود مبنایی مناسب برای درک پدیده‌های مجرد جدیدتر و جامع‌تر خواهد شد. به ویژه هنگام مطالعه‌ی توپولوژی، این مهم قابل حس و تجربه است، زیرا بهترین نمونه‌ها و مثال‌ها از فضاهای توپولوژیک، فضاهای متریک هستند. فضاهای متریک، چه در آنالیز خطی و چه در آنالیز غیرخطی، بسیار گسترش یافته‌اند و برای مطالعه و درک آنها ابزاری قدرتمند محسوب می‌شوند.

در نگارش این کتاب، تلاش شده است تا شناخت مناسبی از فضاهای متریک به خواننده منتقل شود. به گمان نویسنده، با شناخت کافی از فضاهای متریک می‌توان به درک شایسته‌ای از مفاهیم پیشرفته‌ی آنالیز ریاضی دست یافت. ظرافت و دقتی ذاتی که در موضوعات متناظر نهفته است زمینه‌ساز درک مفاهیم انتزاعی جدید و ایجاد نظم ذهنی برای خواننده است. با ارائه تعمیم طبیعی از مفهوم متریک، می‌توان خاستگاه بسیاری از رویدادهای دنیای گذشته، حال و شاید آینده را درک کرد. با تغییر متریک یا حتی تغییر جزئی فضای زمینه، سرنوشت گزاره‌ها به طرز عجیبی دگرگون می‌شود و این به خواننده می‌آموزد که چگونه نگاهی به آنچه حقیقت مطلق می‌پندارد داشته باشد.

مفهومی بنیادی همچون متریک در منابع گوناگون از قبیل کتاب‌ها، مقالات و تارنماها قابل جستجو است و کتاب‌های معتبر متنوعی در این زمینه به رشته‌ی تحریر درآمده‌اند. آنچه در این کتاب مورد نظر نویسنده بوده است، معرفی ساده‌ای از برخی مفاهیم در فضاهای متریک با ارائه‌ی مثال‌های متنوع و طرح پرسش‌هایی طبیعی درباره‌ی آنهاست. اغلب پس از آنکه مفهومی بیان یا قضیه‌ای اثبات می‌شود، یک یا چند پرسش طبیعی به همراه پاسخ پیش روی خواننده قرار می‌گیرد. برای کسب مهارت بیشتر در زمینه‌های گوناگون، موضوعاتی نیز در قالب پروژه برای خواننده طرح شده‌اند که در صورت علاقه‌مندی می‌تواند به تحقیق پیرامون آنها بپردازد. قسمت‌هایی که عناوین آنها ستاره‌دار هستند پیشنهاد قسمت‌های

غیرستاره‌دار بعدی نمی‌باشند و خواننده می‌تواند از مطالعه‌ی آنها صرف نظر کند. با وجود این، پیشنهاد می‌شود که به دلیل اهمیت قسمت‌های ستاره‌دار، همه‌ی آنها مطالعه شوند. همچنین در پایان هر فصل، تعدادی مسأله‌ی مرتبط با مفاهیم ارائه‌شده در آن فصل حل و پس از آنها نیز تمرینات متنوعی گنجانده شده‌اند که حل آنها توصیه می‌شود.

در این کتاب، رویکرد اصلی مورد نظر نویسنده «رهیافت دنباله‌ای» به مفاهیم توپولوژیک در فضاها می‌تریک است. به گمان وی، یکی از بهترین روش‌های بررسی اشیا و پدیده‌هایی که با مفهوم بی‌نهایت سروکار دارند، استفاده از گام‌های شمارش‌پذیر است و در فضاها می‌تریک، این مهم با رهیافت دنباله‌ای هموار می‌شود. اگرچه رهیافت دنباله‌ای در فضاها می‌توپولوژیک کافی نیست، ولی دنباله‌ها همتای مناسبی در فضاها می‌توپولوژیک به نام «تورها» دارند که نقش مشابهی در آنجا ایفا می‌کنند. بنابراین رهیافت دنباله‌ای به همراه تکنیک‌های به کار رفته، در مطالعه‌ی فضاها می‌توپولوژیک نیز کارایی دارد.

مطالعه‌ی این کتاب برای دانشجویان رشته‌ی ریاضی (به ویژه دانشجویان دوره‌ی کارشناسی) پیشنهاد می‌شود. همچنین این کتاب برای دانشجویان دکترای رشته‌های مهندسی که در پژوهش‌های خود نیاز به ابزارهایی همچون آنالیز تابع و آثار حقیقی دارند می‌تواند مفید واقع شود. پیشنیازهای لازم برای مطالعه‌ی این کتاب، ریاضی عمومی (۱ و ۲) و ریاضی عمومی (۱) و نظریه‌ی مقدماتی مجموعه‌هاست.

این کتاب در هفت فصل به شرح زیر تنظیم شده است:

در فصل اول، پس از معرفی فضاها می‌تریک به رانه‌ی مثال‌های متنوع و کلاسیک از آن پرداخته شده است. در پایان فصل نیز زیرفضاها می‌تریک به عنوان رده‌ای طبیعی از فضاها می‌تریک معرفی شده‌اند. در فصل دوم، دنباله‌ها، مفهوم همگرایی و ویژگی که دنباله‌ها در فضاها می‌تریک معرفی شده‌اند. همچنین در این فصل، فضاها می‌تریک کامل معرفی شده‌اند. در فصل سوم، ابتدا با استفاده از مفهوم همگرایی دنباله‌ها مجموعه‌های بسته در فضاها می‌تریک معرفی و سپس مجموعه‌های باز به عنوان متمم مجموعه‌های بسته تعریف می‌شوند. همچنین، مفاهیم کران‌داری، حجم‌های چگال، فضاها می‌تریک جداسدنی و مجموعه‌های بی‌نقص مطالعه می‌شوند. فصل چهارم با معرفی مفهوم فشردگی در فضاها می‌تریک به کمک دنباله‌ها آغاز می‌شود و سپس، با معرفی عدد لیب، نشان داده می‌شود که در فضاها می‌تریک، فشردگی به کمک دنباله‌ها با فشردگی به کمک پوشش‌های باز معادل است. در ادامه‌ی این فصل نیز به اصول شمارش‌پذیری و مفاهیم همبندی و کران‌داری توری در فضاها می‌تریک پرداخته می‌شود. در فصل پنجم، مفاهیم حد و پیوستگی در فضاها می‌تریک معرفی شده‌اند. رابطه‌ی بین پیوستگی و فشردگی و همبندی نیز در این فصل بررسی شده است. همچنین، پیوستگی یکنواخت در فضاها می‌تریک معرفی شده است و محک‌های متعددی برای بررسی پیوستگی یکنواخت توابع ارائه شده‌اند. در فصل ششم، میدان اعداد حقیقی به کمک دنباله‌های کوشی از اعداد گویا ساخته می‌شود. در قسمت کامل‌سازی فضاها می‌تریک، اثربخشی این روش ساخت میدان اعداد حقیقی خود را نشان می‌دهد. همچنین، در این فصل، فضاها می‌تریک پیر بررسی شده‌اند و به ویژه، قضیه‌ی رسته‌ی پیر اثبات شده است. سرانجام در فصل پایانی، یعنی فصل هفتم، همگرایی نقطه‌وار و همگرایی یکنواخت دنباله‌ها و سری‌های تابعی مطالعه شده‌اند. به ویژه، ثابت می‌شود که توابع پیوسته‌ی هیچ‌جا مشتق‌پذیر به لحاظ توپولوژیک بسیارند و تقریباً در همه‌جای فضای توابع پیوسته حضور دارند. قسمت‌های پایانی

این فصل، همچنین به دو قضیه با اهمیت در آنالیز ریاضی، یعنی قضیه آرزلا-آسکولی و قضیه استون-وایراشتراس اختصاص یافته است. برای قضیه استون-وایراشتراس از برهانی ظریف و نسبتاً مقدماتی استفاده شده است.

در پایان جای آن دارد از همه دانشجویانی که طی سالیان گذشته، در کلاس‌های درس آنالیز ریاضی، پرسش‌های مناسبی مطرح و به بهتر شدن این اثر کمک کرده‌اند، تشکر و قدردانی کنم. سپاس و تشکر صمیمانه‌ی خود را از دکتر آریس آقانیانس ابراز می‌نمایم که با دقت و نگاه موشکافانه‌ی خود، محتویات این کتاب را مطالعه کرده و پیشنهادهای گوناگون و ارزشمندی ارائه داده است. از خواننده نیز تقاضا می‌شود که در صورت تمایل، پیشنهاد یا نقد خود را درباره‌ی این کتاب به نویسنده ارسال نماید.

کوروش نوروزی

استاد دانشکده‌ی ریاضی

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

email:nourouzi@kntu.ac.ir

www.ketab.ir