

به نام خدا



دانشگاه تهران

الگوریتم‌های گرادیان مزدوج در بهینه‌سازی نامحدب

تالیف

رادوسلاو بیتلاک

ترجمه

دکتر مجید ادیب

(عضو هیئت علمی دانشگاه زنجان)

سرشناسه	پیتلاک، رادوسلاو، ۱۹۵۶ - م. Pytlak, Radosław
عنوان و نام پدیدآور	الگوریتم‌های گرادیان مزدوج در بهینه‌سازی نامحدوب/تالیف رادوسلاو پیتلاک؛ ترجمه مجید ادیب؛ ویراستار مهدی کمالی.
مشخصات نشر	زنجان: دانشگاه زنجان، ۱۳۹۵.
مشخصات ظاهری	۴۸۷ص
شابک	978-964-8885-76-7
وضعیت فهرست نویسی	فیبا
یادداشت	عنوان اصلی: Conjugate gradient algorithms in nonconvex optimization, c2009.
موضوع	روش گرادیان مزدوج / Conjugate gradient methods
موضوع	الگوریتم‌ها / Algorithms
شناسه افزوده	ادیب، مجید، ۱۳۳۶- مترجم
شناسه افزوده	دانشگاه زنجان
رده بندی کنگره	۱۳۹۵ ۷Q۸۲۱۸ پ۹
رده بندی دیویی	۸۲۳/۱
شماره کتابشناسی ملی	۴۱۶۱۰



الگوریتم‌های گرادیان مزدوج در بهینه‌سازی نامحدوب

ترجمه: دکتر مجید ادیب

ویراستار: مهدی کمالی

نوبت چاپ: اول - ۱۳۹۵

ناشر: انتشارات دانشگاه زنجان

طراحی جلد و صفحه آرای: انتشارات پادینا

چاپ: کیامرثی

شابک: ۷-۷۶-۸۸۸۵-۹۶۴-۹۷۸

قیمت: ۲۶۵۰۰۰ ریال

پیشگفتار

روش‌های جهت (مسیر) مزدوج در اوایل دهه‌ی ۱۹۵۰ زمانی که ماشین‌های دیجیتال با سرعت بالا توسعه یافته بودند، پیشنهاد شد. تلاش شد تا از این امکانات برای جنبه‌های ریاضی محاسبات که در آن‌ها می‌توان از مزیت این ماشین‌های دیجیتال بهره گرفت، استفاده شود. اداره‌ی ملی استاندارد، موسسه آنالیز عددی که در دانشگاه کالیفرنیا در لس آنجلس تأسیس شده بود را مورد حمایت قرار داد. در آنجا سمیناری در زمینه‌ی روش‌های عددی برای معادلات خطی توسط ماگنوس^۱ هستنس^۲، ادوارد استیفل^۳ و کرنلیوس لانکسوز^۴ برگزار شد. این منجر به اولین ارتباط بین لانکسوز و هستنس (محققین آن بی‌اس) و استیفل، رازای تی‌اچ در زوریخ^۵ روی الگوریتم جهت مزدوج شد. این روش به هستنس و استیفل کسانی که مقاله‌ی مشترک خود را در سال ۱۹۵۲ به چاپ رساندند نسبت داده شد که در آن مقاله، هر دو روش گرادیان مزدوج و روش‌های جهت مزدوج، شامل فرایند گرام - اشتیافت را ارائه کردند. یک الگوریتم نزدیک به کار آن‌ها توسط لانکسوز که روی الگوریتم عددی در بین مقادیر ویژه‌ی یک ماتریس کار کرده بود، پیشنهاد شد. الگوریتم تکراری او یک ماتریس را به یک ماتریس مشابه سه قطری تبدیل می‌کند که به کمک آن مقادیر ویژه‌ی یک ماتریس را می‌توان به خوبی تقریب کرد. فرایند رابط‌ی سه جمله‌ای بازگشتی لانکسوز را می‌توان با حذف یک بردار از فرایند الگوریتم جهت مزدوج به‌دست آورد. الگوریتم اولیه، الگوریتم گرادیان مزدوج روش هستنس - استیفل - لانکسوز نامیده شد [۸۶].

در [۱۰۰] هستنس مفهوم مزدوج بودن را با نماد $\sim$ معرفی کرد. بیرهف^۶ نیز از این نماد در ۱۹۳۶ برای مفهوم نظریه‌ی تغییرات استفاده کرد. در آن زمان هستنس نیز روی فرایند گرام - اشمیت برای یافتن قطرهای مزدوج یک بسط متعامد تحقیق می‌کرد. با این حال هستنس در کار بعدی که هرگز منتشر نشد، به جای مفهوم زوج، برای توسعه یک تئوری کلی، از شکل‌های درجه دوم در فضای هیلبرت استفاده کرد.

اولین تجارب عددی در مورد الگوریتم‌های گرادیان مزدوج چندان دائمی کننده نبود. اگر چه در سال‌های ۱۹۶۰ به‌طور وسیعی از آن‌ها استفاده شد ولی کاربرد آن‌ها روی مسائل بدحالت نتایج ضعیف‌تری را نشان داد. در آن زمان تکنیک‌های پیش شرط کردن

^۱ Magnus

^۲ Hestenes

^۳ Eduard Stiefel

^۴ Cornelius Lanczos

^۵ ETH in Zurich

^۶ Birkhoff

بخوبی شناخته نشده بود. کار دیودن^۱ روی الگوریتم متغیر متریک توسط فلچر^۲ و پاول^۳ [۱۹۰] دنبال شد. انواع دیگر این روش‌ها توسط برویدن^۴ فلچر [۹۸]، گلد فارب [۸۳] و شانو [۱۹۰] ارائه و منجر به ایجاد یکی از کاراترین تکنیک‌ها برای مینیم کردن یک تابع غیر درجه دوم شد. ایده‌ی اصلی روش‌های متغیر متریک ساختن یک دنباله از ماتریس‌های بهبود دهنده‌ی تقریب ماتریس هسیان (یا وارونش) با استفاده از فرمول‌های بهنگام سازی رتبه یک (یا رتبه دو) است. این روش‌ها وقتی که روی توابع درجه دوم به کار روند در واقع الگوریتم‌های گرادیان مزدوج هستند و در این حالت آن‌ها ماتریس هسیان را در یک تعداد تکرار متناهی محاسبه می‌کنند. بنابراین روش‌های متغیر متریک دارای ویژگی‌های خاصی هستند که الگوریتم‌های گرادیان مزدوج دیگر، از آن برخوردار نیستند. در این پژوهش توجه زیادی به ویژگی‌های تکنیک متغیر متریک نکرده‌ایم، زیرا توجه اصلی ما به الگوریتم‌های برای مسائل با ابعاد بزرگ است. در حالت کلی تقریب‌های حاصل از متغیر متریک برای ماتریس هسیان، ماتریس‌هایی چگال هستند و به این دلیل برای مسائل با تعداد بسیار زیاد مناسب نیستند. این به این معنی نیست که من از دسترس بودن روش‌های شبه-نیوتن جدگیری کرده‌ام، زیرا یکی از تمهای اصلی این پژوهش، روش‌های شبه-نیوتن با حافظه‌ی محدود است که از یک فرایند بهنگام سازی متغیر متریک ولی با ذخیره‌ی حافظه‌ی مشخص، استفاده می‌کند. این روش‌ها بازسازی هسیان دقیق را در تعداد متناهی تکرار تضمین می‌کنند، در این حال آن‌ها الگوریتم‌های گرادیان مزدوج هستند و برای مسائل با ابعاد بزرگ طراحی شده‌اند. خانواده‌ی این روش‌ها با کار نوسدال^۵ [۱۴۴] آغاز شد و یکی از جالب‌ترین تکنیک‌ها با ویژگی حافظه‌ی محدود، از الگوریتم‌های هسیان تقلیل یافته با حافظه‌ی محدود، توسط گیل^۶ لئونارد [۸۱] مورد بحث قرار گرفت. علاقه‌ی من به الگوریتم‌های گرادیان مزدوج از زمانی که در رساله‌ی دکتری خود روی مسائل کنترل بهینه میناکس تحقیق می‌کردم، آغاز شد. مواهب زیادی از کاربردهای الگوریتم‌های گرادیان مزدوج برای حل مسائل کنترل بهینه [۱۱۶]، [۱۱۷]، [۱۵۵]، [۱۹۸] وجود دارد. در آن زمان، کار دکتری من برای بهینه‌سازی دینامیک ناپذیر توسعه داده شد. تلاش‌ها از مقاله‌ی مؤثر کلارک [۳۲] روی یک زیردیفرانسیل از یک تابع موضعاً لپیشیتز آغاز و منجر به استفاده از یک مفهوم جدید از مشتق‌پذیری به منظور گسترش الگوریتم‌هایی برای مسائلی شد که به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر نیستند. لمارشال [۱۱۸] و ولف [۲۰۹] چنین الگوریتم‌هایی را برای توابع محدب پیشنهاد کردند. آن‌ها ملاحظه کردند که روش‌هایشان هنگامی که روی مسائل درجه دوم به کار رود، روش گرادیان

^۱Davidon

^۲Fletcher

^۳Powell

^۴Broyden

^۵Nocedal

^۶Gill

مزدوج است. بنابراین طبیعی است که الگوریتم لمارشال-ولف^۱ را در میان الگوریتم‌های گرادیان مزدوج جای دهیم. این کار ابتدا در رساله‌ی دکترای من و سپس در یک مقاله [۱۷۴] صورت گرفت. از آن‌جا که در آن زمان علاقه‌ی من به الگوریتم‌های گرادیان مزدوج به سبب مسائل کنترل بهینه بود، کاربرد اخیر نسخه‌های جدید الگوریتم لمارشال-ولف در متن مسائل کنترل بهینه مینماکس گزارش شده بود [۱۷۸، ۱۷۳].

من نشان دادم که روش لمارشال-ولف مشروط بر دقیق بودن جستجوی خطی، با نسخه‌ی فلچر-ریوز از الگوریتم گرادیان مزدوج، معادل است [۱۷۴]. با توجه به این‌که در پژوهشی از هستنس این الگوریتم برای توابع درجه دوم با نام کوتاه‌ترین باقی‌مانده‌ها بررسی شده بود، یوان^۲ و دی^۳ نیز از این الگوریتم به‌عنوان روش کوتاه‌ترین باقی‌مانده‌ها [۴۳] یاد کردند [۱۰۰].

این کتاب، از کتاب گرایش‌های من به روش کوتاه‌ترین باقی‌مانده‌هاست. این کتاب روش اصلی بیان شده در [۱۷۴] را با الگوریتم‌های گرادیان مزدوج استاندارد دیگر مقایسه و مرور می‌کند. بهرحال این کتاب از تکنیک‌هایی که روش اصلی پیشنهادی هستنس، لانکسوز و استیفل را تقسیم می‌دهد فراتر می‌رود. در این کتاب به نسخه‌های پیش‌شرط شده روش‌های مذکور توجه زیادی شده است و از آن‌جا که الگوریتم‌های شبه-نیوتن حافظه محدود وقتی روی مثلث درجه دوم اعمال می‌شوند، جزء الگوریتم‌های گرادیان مزدوج پیش‌شرط شده قرار می‌گیرند، در باره‌ی تکنیک‌های متغیر متریک نیز بحث شده است.

بسیاری از مسائل بهینه‌سازی با متغیرهای کراندار فرموله شده‌اند. چنین مسائلی را نمی‌توان مستقیماً با الگوریتم‌های گرادیان مزدوج، یا تغییرهای متریک حل کرد. چندین روش اصلاح شده از این روش‌ها برای مقابله با تأثیر این محدودیت‌ها پیشنهاد شده است. به نظر می‌رسد که مشکل کران‌های با تکنیک‌های بهینه‌سازی که تأثیر قابل توجهی روی کارایی آن‌ها دارد، حل می‌شود. در این کتاب، الگوریتم‌های کراندار مزدوج، گرادیان مزدوج پیش‌شرط شده و الگوریتم‌های شبه-نیوتن با حافظه‌ی محدود، اصلاحات آن‌ها همراه با قیود ساده ارائه شده است.

من تلاش‌هایی برای مقایسه‌ی عددی الگوریتم‌های بررسی شده انجام دادم، اگرچه در برخی حالات برای آزمایش کردن مسائلی که برای من چندان شناخته شده نبود، تغییراتی را روی کد برنامه برای سازگاری آن لازم دیدم. در این موارد تصمیم گرفتم رفتار عددی کد را همان‌طور که در مجموعه‌ی مسائل آزمون ملاحظه نمی‌شود، ارائه نکنم. با این حال، امیدوارم که مقایسه‌های عددی ارائه شده، کارایی رده‌های مختلف الگوریتم‌های گرادیان مزدوج و شبه-نیوتن را برای مسائل با ابعاد بزرگ نشان دهد. اگر چنین باشد یکی از اهداف کار من برآورده شده است. اما بی‌شک این کار از علاقه‌ی من به تکنیک

^۱ Lemarechal-Wolff

^۲ Yuan

^۳ Day

بهینه‌سازی که مرا به مرکز بهینه‌سازی رهنمون ساخت، نشأت گرفت. من مدیون نوشته‌های مختلف در زمینه‌ی روش‌های عددی در بهینه‌سازی هستم. به‌ویژه از نوشته‌ی فلچر [۷۱]، نوسدال و رایت [۱۴۶]^۱ و رساله‌ی هستنس [۱۰۰] تأثیر زیادی گرفته‌ام. قسمتی از این کار در طول کار پایان‌نامه‌ی دانشجوی دکتری من در انیستیتی کنترل اتوماتیک از دانشگاه صنعتی وارسا، و مابقی در مرکز فرایند مدیریت سیستم‌ها در ایمپریال کالج لندن، صورت گرفته است. هر دو مکان، شرایط مشابهی را برای تحقیق فراهم کردند که امکان گزارش آن را در این کتاب نداشتیم. چند نفر به طرق مختلف در این کتاب نقش داشته‌اند به همین دلیل سعی کرده‌ام که اعتبار فردی به شخص خاصی داده نشود. من بیشتر سپاسگزار لوسین پولاک^۲ برای مباحث که در مدت ملاقات با او در ایمپریال کالج داشتم، مهیدین ال-بالی^۳ به سبب راهنمایی‌های خارج از وظیفه اش در کار با روبرت فلچر در خصوص الگوریتم‌های گرادیان مزدوج پیش‌رط شده، و دانشجوی دکتری خودم توماس تارناسکی^۴ برای کد الگوریتم‌های ارائه شده در این کتاب، هستم.

رادوسلاو پیتلاک^۵

^۱ Wright

^۲ Lucien Polaak

^۳ Mehiddin Al-Baali

^۴ Tomasz Tarnawski

^۵ Radoslaw Pytlak

فهرست مطالب

۵	فهرست مطالب
۱۰	لیست تصاویر
۱۶	لیست جداول
۱	۱ روش‌های مسیر مزدوج برای مسائل درجه دوم
۱	۱.۱ مقدمه
۴	۲.۱ روش‌های مسیر مزدوج
۱۳	۳.۱ الگوریتم‌های خطای گرادیان متغیر
۲۰	۴.۱ الگوریتم‌های گرادیان مزدوج باقی‌مانده
۲۵	۵.۱ روش کوتاه‌ترین باقی‌مانده‌ها
۲۷	۶.۱ نرخ همگرایی
۳۷	۷.۱ روابط حل مستقیم مجموعه معادلات خطی
۴۴	۸.۱ الگوریتم‌های شبه-نیوتن با حافظه‌ی محدود
۵۲	۹.۱ الگوریتم‌های شبه-نیوتن با هسیان تقریبی یافته
۵۶	۱۰.۱ الگوریتم‌های شبه-نیوتن با حافظه‌ی محدود و هسیان تقریبی یافته
۵۹	۱۱.۱ الگوریتم غیرگرادیان مزدوج
۶۱	۱۲.۱ ملاحظات
۶۳	۲ روش‌های گرادیان مزدوج برای مسائل نامحدب
۶۳	۱.۲ مقدمه
۶۶	۲.۲ روش‌های جستجوی خطی
۷۱	۳.۲ نتایج کلی همگرایی
۷۷	۴.۲ الگوریتم انتخاب طول گام تونت-مور
۸۱	۵.۲ الگوریتم انتخاب طول گام هیگر-زنگ

۶.۲	الگوریتم‌های گرادیان مزدوج غیرخطی	۸۵
۷.۲	همگرایی سراسری الگوریتم فلچر-ریوز	۸۸
۸.۲	نمونه‌های دیگری از الگوریتم فلچر-ریوز	۹۷
۹.۲	همگرایی سراسری الگوریتم پولاک-ریبیر	۱۰۰
۱۰.۲	نمونه‌های استاندارد الگوریتم گرادیان مزدوج	
۱۰.۳	هستنس-استیفل	
۱۱.۲	ملاحظات	۱۰۸
۳	رویه‌های شبه-نیوتن بی حافظه	۱۱۱
۱.۳	مقدمه	۱۱۱
۲.۳	الگوریتم گرادیان مزدوج به عنوان روش شبه-نیوتن بی حافظه	۱۱۴
۳.۳	قانون‌های شروع مجدد بیل	۱۱۸
۴.۳	همگرایی الگوریتم شانو	۱۲۱
۵.۳	ملاحظات	۱۲۹
۴	الگوریتم‌های گرادیان مزدوج پیش شرط شده	۱۳۴
۱.۴	مقدمه	۱۳۴
۲.۴	نرخ همگرایی	۱۳۵
۳.۴	الگوریتم گرادیان مزدوج و روش نیوتن	۱۴۱
۴.۴	الگوریتم گرادیان مزدوج پیش شرط شده کلی	۱۴۷
۵.۴	الگوریتم گرادیان مزدوج ذخیره‌ساز متغیر شبه-نیوتن-گونه	۱۵۰
۶.۴	مقیاس بندی همانی	۱۵۶
۷.۴	ملاحظات	۱۵۹
۵	الگوریتم‌های شبه-نیوتن با حافظه‌ی محدود	۱۶۱
۱.۵	مقدمه	۱۶۱
۲.۵	همگرایی سراسری الگوریتم BFGS با حافظه‌ی محدود	۱۶۴
۳.۵	نمایش فشردگی تقریب BFGS وارون ماتریس هسیان	۱۷۰
۴.۵	نمایش فشردگی تقریب BFGS ماتریس هسیان	۱۷۶
۵.۵	آزمایش‌های عددی	۱۷۹
۶.۵	ملاحظات	۱۸۰
۶	روش کوتاه‌ترین باقی‌مانده‌ها و بهینه‌سازی مشتق‌ناپذیر	۱۹۲
۱.۶	مقدمه	۱۹۲
۲.۶	روش زیرگرادیان مزدوج لمارشال-ولف	۱۹۳
۳.۶	الگوریتم زیرگرادیان مزدوج برای مسائل با توابع نیم-هموار	۲۰۷

۲۱۳	الگوریتم‌های زیرگردیان با ذخیره‌سازی متناهی	۴.۶
۲۱۸	ملاحظات	۵.۶

۲۱۹	روش کوتاه‌ترین باقی‌مانده‌ها برای مسائل مشتق‌پذیر	۷
۲۱۹	مقدمه	۱.۷
۲۲۱	الگوریتم عمومی	۲.۷
۲۲۹	نسخه‌های روش کوتاه‌ترین باقی‌مانده‌ها	۳.۷
۲۳۲	نسخه‌ی بولاک-ریبیر از روش کوتاه‌ترین باقی‌مانده‌ها	۴.۷
۲۳۵	روش کوتاه‌ترین باقی‌مانده‌های دای و یوان	۵.۷
۲۴۳	مگرایی سراسری الگوریتم لمارشال-ولف بدون شروع مجدد	۶.۷
۲۴۶	مثال نقض	۷.۷
۲۵۲	آزمایش‌های عددی: مقایسه‌های اولیه	۸.۷
۲۵۸	آزمایش‌های عددی: مقایسه با روش شبه-نیوتن بی‌حافظه	۹.۷
	آزمایش‌های عددی: مقایسه با روش شبه-نیوتن	۱۰.۷
۲۶۱	حافظه محله	
۲۶۱	آزمایش‌های عددی: مقایسه با الگوریتم هیگر-زنگ	۱۱.۷
۲۶۵	ملاحظات	۱۲.۷

۲۸۲	الگوریتم کوتاه‌ترین باقی‌مانده‌ی پیش‌طراحی شده	۸
۲۸۲	مقدمه	۱.۸
۲۸۴	روش کوتاه‌ترین باقی‌مانده‌های پیش‌طراحی عمومی	۲.۸
۲۸۹	همگرایی سراسری الگوریتم گردیان مزدوج پیش‌طراحی شده	۳.۸
۲۹۱	مقیاس کردن ماتریس‌ها	۴.۸
۲۹۳	الگوریتم گردیان مزدوج با مقیاس‌سازی BFGS	۵.۸
۲۹۶	آزمایش‌های عددی	۶.۸
۲۹۷	ملاحظات	۷.۸

۳۰۲	بهینه‌سازی روی یک چندوجهی	۹
۳۰۲	مقدمه	۱.۹
۳۱۱	مجموعه‌های مفسر	۲.۹
۳۱۴	شناسایی قیود فعال	۳.۹
۳۱۸	روش تصویر گردیان	۴.۹
۳۲۴	در ارتباط با معیار توقف	۵.۹
۳۲۹	ملاحظات	۶.۹

۳۳۱	۱۰ الگوریتم گرادیان مزدوج برای مسائل مقید جعبه‌ای
۳۳۱	۱.۱۰ مقدمه
۳۳۲	۲.۱۰ نظریه‌ی همگرایی عمومی
۳۴۶	۳.۱۰ همگرایی سراسری نسخه‌ی پولاک-ریبیر از الگوریتم ۱.۱۰
۳۵۴	۴.۱۰ آنالیز همگرایی نسخه‌ی فلچر-ریوز از الگوریتم ۱.۱۰
۳۶۰	۵.۱۰ آزمایش‌های عددی
۳۶۳	۶.۱۰ ملاحظات

۳۷۴	۱۱ الگوریتم‌های گرادیان مزدوج پیش‌شرط شده برای مسائل مقید جعبه‌ای
۳۷۴	۱.۱۱ مقدمه
۳۷۵	۱.۱۱ شناسایی قیدهای فعال با حل مسئله‌ی درجه دوم
۳۸۰	۲.۱۱ الگوریتم کوتاه‌ترین باقی‌مانده‌های پیش‌شرط شده: طرح کلی
	۴.۱۱ الگوریتم کوتاه‌ترین باقی‌مانده‌های پیش‌شرط شده: همگرایی سراسری
۳۸۸	
۳۸۹	۵.۱۱ روش شبه-نیوتن: حافظه محدود برای مسائل با قیود جعبه‌ای
۳۹۰	۶.۱۱ جبر عددی
۳۹۲	۷.۱۱ کاربرد الگوریتم‌های ۱.۱۱، ۲.۱۱ روی مسائلی با توابع قویاً محدب
۳۹۳	۸.۱۱ آزمایش‌های عددی
۳۹۵	۹.۱۱ ملاحظات

۴۰۳	۱۲ روش‌های گرادیان مزدوج پیش‌شرط شده مبتنی بر هسیان تقلیل یافته
۴۰۳	۱.۱۲ مقدمه
۴۰۴	۲.۱۲ بهنگام‌سازی BFGS با مقیاس کردن ستونی
	۳.۱۲ روش کوتاه‌ترین باقی‌مانده‌های پیش‌شرط شده
۴۱۴	با مقیاس کردن ستونی
۴۱۶	۴.۱۲ الگوریتم شبه-نیوتن با هسیان تقلیل یافته
۴۲۵	۵.۱۲ الگوریتم‌های شبه-نیوتن با هسیان تقلیل یافته‌ی حافظه محدود
۴۲۹	۶.۱۲ الگوریتم گرادیان مزدوج پیش‌شرط شده مبتنی بر هسیان تقلیل یافته
۴۳۳	۷.۱۲ ملاحظات

۴۳۳ پیوست‌ها

۴۳۴	آ مقدماتی از توپولوژی و آنالیز
۴۳۴	۱.آ توپولوژی فضای اقلیدسی
۴۳۷	۲.آ پیوستگی و تحدب
۴۴۰	۳.آ مشتقات

۴۴۵	ب. مقدماتی از جبر خطی
۴۴۵	ب.۱. نرم های برداری و ماتریسی
۴۴۶	ب.۲. تجزیه ی طیفی
۴۵۲	ب.۳. دترمینان و اثر
۴۵۴	پ. مقدماتی از جبر خطی عددی
۴۵۴	پ.۱. دستگاه معادلات خطی و عدد حالت
۴۵۶	پ.۲. تجزیه های LU و چولسکی
۴۵۸	پ.۳. تجزیه ی QR
۴۵۹	پ.۴. تجزیه ی QR هاوس هولدر
۴۶۱	پ.۵. تم تجزیه ی QR گیونز
۴۶۵	پ.۶. تجزیه ی QR گرام اشمیت
۴۶۸	کتاب نامه
۴۸۶	نمایه