

خدا یا چنان کن سرانجام کار تو خوشنود باشی و ما را رستگار

مقدمه‌ای بر هندسه نیچا دها

کرد آوری: آزاد شیخی

چاپ اول - بهار ۱۳۹۶

سرشناسه: شیخی، آزاد، ۱۳۶۱

عنوان و نام پدیدآور: مقدمه‌ای بر هندسه منیفلدها

مشخصات نشر: تهران: مدرسان شریف، ۱۳۹۵.

مشخصات ظاهری: [۸] ۳۲۲ ص: ۲۹×۲۲ س.م.

شابک: 978-964-11-5575-1

وضعیت فهرست نویسی: فیپای مختصر

یادداشت: فهرست نویسی: عمل این اثر در نشانی: <http://opac.nlai.ir> قابل دسترسی است.

شماره کتابشناسی ملی: ۴۵۴۱۰۰

نام کتاب: مقدمه‌ای بر هندسه منیفلدها

گردآوری: آزاد شیخی

ناشر: انتشارات مدرسان شریف

تیراژ: ۱۰۰ نسخه

نوبت چاپ: اول

تاریخ چاپ: اردیبهشت‌ماه ۱۳۹۶

حروف چینی: واحد تایپ انتشارات مدرسان شریف

طراح جلد: اسرین کاکی

چاپ و صحافی: مهاجرنو

قیمت: ۲۸۰۰۰ تومان

شابک: 978-964-11-5575-1

هر گونه استفاده از مطالب این کتاب اعم از بازنویسی، خلاصه‌سازی، نقل مطالب آموزشی، استفاده از سؤالات یا پاسخ‌ها، برداشت به صورت دست‌نویس، کپی، تکثیر و یا هر گونه چاپ سنتی و دیجیتالی، استفاده به صورت کتاب الکترونیکی، لوح فشرده، قرار دادن مطالب بر روی اینترنت و وب سایت‌ها و یا هر گونه شبکه کامپیوتری دیگر و به طور کل هر گونه استفاده‌ی اشخاص حقیقی و حقوقی در جهت منافع معنوی و مادی خود، بدون اجازه کتبی ناشر ممنوع و بر اساس بند (۵) ماده ۲۳ قانون حمایت از حقوق مؤلفان و مصنفان و قوانین مربوط به جرایم رایانه‌ای کشور قابل پیگیری در محاکم قضایی می‌باشد.

این اثر را تقدیم می‌کنم به روان پاک ریاضی دانانی که اهرست‌های سر در ابر آسمان اندیشه و پی‌افکنان سلاهای استوار موفقیت‌اند.

هندسه ((به یونانی γεωμετρία)) با دو جزء ژئو (زمین) و مترون (اندازه‌گیری)) شاخه‌ای از ریاضیات است که با شکل، اندازه، موقعیت‌بندی اشکال و ویژگی‌های فضا سروکار دارد. هندسه به طور مستقل در پارهای از تمدن‌های اولیه به شکل بدنه‌ای از دانش عملی در مورد طول، مساحت و حجم ظهور کرد و به عنوان یک دانش رسمی در زمان طالاس (قرن ششم قبل از میلاد) در غرب پایه‌ریزی شد. در قرن سوم پیش از میلاد، هندسه توسط اقلیدس به شکل اصل موضوعی درآمده بود و کار اقلیدس - هندسه اقلیدسی - پایه‌ریزی استاندارد بود که قرن‌ها دنبال شد. ارشمیدس روش‌های هوشمندانه‌ای برای محاسبه مساحت و حجم ارائه کرد که در بسیاری موارد پیشرو حساب دیفرانسیل و انتگرال نوین محسوب می‌شوند. دانش اخترشناسی، به ویژه نگاشتن مکان ستاره‌ها و سیاره‌ها و توصیف رابطه بین حرکت اجسام آسمانی تا هزار و پانصد سال بعد منشأ بسیاری از پرسش‌های هندسی بود. هر دوی هندسه و اخترشناسی در دنیای کلاسیک بخشی از کوادرپویم بودند که خود زیرمجموعه‌ای از علوم مقدماتی هفتگانه بود و یادگیری آن‌ها برای هر شهروند آزادی ضروری به حساب می‌آمد.

معرفی دستگاه مختصات توسط رنه دکارت و توسعه هم‌زمان در جبر منجر به آغاز مرحله‌ای تازه در هندسه شد؛ زیرا اشکال هندسه همچون منحنی‌های رویه‌ای را می‌شد به شکل تحلیلی یعنی با توابع و معادلات نمایش داد. این موضوع نقشی کلیدی در پیدایش حساب بی‌نهایت کوچک در قرن هفدهم داشت. موضوع هندسه با مطالعه ساختار ذاتی اجسام هندسی و با شروع از کارهای اوپلر و گاوس، غنی‌تر شد و به پیدایش توبولوژی و هندسه دیفرانسیل انجامید.

در دوران اقلیدس تمایز آشکاری بین فضای فیزیکی و فضای هندسی وجود نداشت. از قرن نوزدهم و کشف هندسه ناقصی مفهوم فضا دستخوش تغییرات اساسی شده است و آن پرسش پدید آمده است: کدام فضای هندسی تطبیق بیشتری با فضای فیزیکی دارد؟ امروزه باید بین فضای فیزیکی، فضای هندسی و فضاهای انتزاعی تمایز قائل شد. هندسه در دنیای معاصر با منیفلدها سروکار دارد؛ فضاهایی که از فضاهای اقلیدسی آشنا بسیار انتزاعی‌ترند. می‌توان به آن فضا، ساختارهایی افزود که بتوانیم در مورد طول در فضا صحبت کنیم. هندسه مدرن پیوندهای مستحکمی با فیزیک دارد که به طور نمونه می‌توان به هندسه ریمانی، شبریمانی و نسبیت عام اشاره کرد.

هندسه ریمانی شاخه‌ای از هندسه دیفرانسیل است که به بررسی منیفلدهای ریمانی می‌پردازد، یعنی منیفلدی که مجهز به یک متریک ریمانی می‌باشد. هندسه ریمانی در قرن نوزدهم توسط برنارد ریمان پایه‌گذاری شد. هندسه ریمانی کاربردی یعنی هندسه‌ای که در آن فضا و زمان خمیده است. برای نمونه اگر خطی واقع بر سطح کره در نظر گیرید، از هیچ نقطه بیرون آن خط نمی‌توان خطی به موازات خط نخست رسم کرد در حالی که در هندسه اقلیدسی این کار کاملاً ممکن است. این هندسه مجموع زوایای مثلث بیشتر از ۱۸۰ درجه می‌باشد. شایان ذکر است یکی از جوان‌ترین نظریه‌های فیزیکی یعنی نظریه ریمان - لورنتس و نسبیت عام هندسی دارد.

مجموعه حاضر با عنوان درس «مقدمه‌ای بر هندسه منیفلدها» یکی از دروس تخصصی رشته ریاضی محض در سطح کارشناسی ارشد به شمار می‌آید. از آنجا که تلاش اینجانب بیشتر مبتنی بر آن بود که کتاب متنوع در سطح‌ها و عناوین تشریح شده برخوردار باشد، به جرئت می‌توانم بگویم به دلیل پیوند ناگسستنی بین سرفصل‌های ارائه شده، ارتباط نزدیکی بین این کتاب و استفاده مکرر مطالب از پیش گفته شده در مطالب بعدی این کار بسی دشوار به نظر می‌رسید؛ لذا علی‌رغم اینکه به کرات از منابع آورده شده در انتهای کتاب استفاده شده است و مثال‌ها، سوالات و مفاهیم ضروری آن‌ها مورد استعمال قرار گرفته‌اند، بخش‌بندی عناوین و سرفصل‌های این کتاب در ۱۱ فصل مطابق با منبع [۸] بوده است و تشریح مطالب درس غالباً مبتنی بر منابع [۵] و [۸] می‌باشد.

از آن جهت که در سال‌های پیش این درس جزء منابع آزمون دکتری دانشگاه آزاد در رشته ریاضی محض بوده است، به درخواست گروه محترم تألیف این مؤسسه سؤالاتی چهارگزینه‌ای در فصل‌های نخستین طرح شده‌اند و در ادامه از طرح سؤالات چهارگزینه‌ای اجتناب شده است، هرچند که طرح این سؤالات کاملاً جنبه مفهومی یا محاسباتی داشته و کاملاً در راستای هدف اصلی بوده است.

در پایان لازم است به رسم تقدیر و سپاس از اساتید گرانقدر جناب آقای دکتر سیدمحمدباقر کاشانی و دکتر حسن حیدری که در طول تحصیل در محضرشان کسب علم و معرفت نمودم، نهایت تشکر و قدرانی را داشته باشم و صادقانه اذعان می‌کنم که تلاش در ارائه آن‌ها در راستای معرفی هندسه ریمان و شبریمان، وجه تمایز آن‌ها با هندسه کلاسیک، مقایسه این دو نوع هندسه به عنوان بعد نظری فیزیک نسبیت و همچنین تأکید آن‌ها بر استفاده بهینه از زمان به منظور بالا بردن میزان توانایی و فهم مطالب قبل تحسین است.

همچنین از خانواده عزیزم که همواره بی‌دریغ یاور و پشتیبانم بوده‌اند بی‌نهایت سپاسگزارم و از دوستان گرامی‌ام آقایان بابک جمشیدی، پوریا سلیمانی‌فر و داوود عبدی به پاس توصیه‌های دلسوزانه و کمک‌های بی‌دریشان تشکر و قدرانی می‌کنم.

در پایان لازم است از مدیریت محترم انتشارات مدرسان شریف که رهنمودهای ایشان باعث ارتقای کتاب شده است کمال تشکر و امتنان را داشته باشم. از واحد تألیف و تایپ انتشارات مدرسان شریف که در هرچه بهتر شدن این کتاب از هیچ کوششی دریغ نورزیدند کمال تشکر را دارم. یقیناً هر اثری توأم با خطایی است؛ لذا از تمامی صاحب‌نظران و دانشجویان تقاضا دارم هرگونه اشکالی را از طریق شماره پیام کوتاه ۰۲۱-۸۳۸۷۱۰۰۰ به ما اطلاع دهند و یا با شماره تلفن «۰۲۱-۶۱۰۹۹۶» (روابط عمومی انتشارات مدرسان شریف) تماس حاصل کنند.

با آرزوی موفقیت

آزاد شیخی

فصل اول: فضاهاى اقليدسى

۱	توابع هموار روی یک فضای اقلیدسی
۴	قضیه تیلور با باقیمانده
۶	بردارهای مماس در $\mathbb{R}^n$ به عنوان مشتق‌ها
۶	مشتق سویی
۷	جرم‌های توابع
۸	مشتقات در یک نقطه
۹	میدان‌های برداری
۱۰	میدان‌های برداری به عنوان مشتق‌گیری‌ها
۱۱	سؤالات فصل اول
۱۲	پاسخنامه سؤالات فصل اول
۱۴	مسئله برای چالش بیشتر

فصل دوم: جبر خارجى چند هم‌بردارها و فرم‌های دیفرانسیل روی $\mathbb{R}^n$

۱۵	فضای دو-فرم
۱۶	جایگشت‌ها
۱۸	توابع چند خطی
۱۸	عمل جایگشت‌ها روی توابع چندخطی
۱۹	عملگرهای متقارن و متناوب
۲۰	حاصل ضرب گوه‌ای
۲۰	ناجابه‌جایی بودن حاصل ضرب گوه‌ای
۲۱	شرکت‌پذیری ضرب گوه‌ای
۲۲	پایه‌ای برای k -هم‌بردارها
۲۳	فرم‌های دیفرانسیل و دیفرانسیل یک تابع
۲۴	k -فرم‌های دیفرانسیل
۲۵	مشتق خارجى
۲۶	فرم‌های بسته و فرم‌های دقیق
۲۷	کاربردهایی در حساب‌های برداری
۲۹	قرارداد زیرنویس‌ها و برنویس‌ها
۳۰	سؤالات فصل دوم
۳۲	پاسخنامه سؤالات فصل دوم
۳۶	مسائلی برای چالش بیشتر

فصل سوم: منیفلدها و نگاشت‌های هموار بین آنها

۳۷	منیفلدها
۴۰	کارت‌های هم‌ساز

مدرس‌ان شریف



۴۲	منیقلدهای هموار
۴۳	مثال‌هایی از منیقلدهای هموار
۴۵	نگاشت‌های هموار بین منیقلدها
۴۷	دیفئومورفیسم‌ها
۴۸	همواری بر حسب مؤلفه‌ها
۴۸	مثال‌هایی از نگاشت‌های هموار
۵۰	مشتق‌های جزئی
۵۱	قضیه تابع وارون
۵۲	نگاشت‌های پوششی هموار
۵۳	نگاشت‌های سره
۵۶	سؤالات فصل سوم
۵۷	پاسخنامه سؤالات فصل سوم
۶۱	مسائلی برای چالش بیشتر

فصل چهارم: منیقلدهای خارج قسمتی

۶۳	توبولوژی خارج قسمت
۶۴	پوشش‌های یک نگاشت روی فضای خارج قسمت
۶۴	شرط لازم برای هاسدورف بودن یک فضای خارج قسمت
۶۵	رابطه‌های هم‌ارزی باز
۶۶	فضای توپولوژیکی
۶۸	اطلس C^∞ استاندارد روی فضای تصویر حقیقی
۶۹	منیقلدهای گراسمان
۷۱	سؤالات فصل چهارم
۷۲	پاسخنامه سؤالات فصل چهارم
۷۴	مسائلی برای چالش بیشتر

فصل پنجم: فضای مماس

۷۵	فضای مماس
۷۶	فضای مماس در یک نقطه
۷۶	دیفرانسیل یک نگاشت
۷۷	قاعده زنجیری
۷۸	پایه‌های برای فضا‌های مماس در یک نقطه
۷۹	تعبیر موضعی دیفرانسیل
۷۹	خم‌های روی یک منیقلد
۸۱	محاسبه دیفرانسیل با استفاده از خم‌ها
۸۲	فروری و مشتق - پوشا
۸۲	رتبه، نقاط بحرانی و نقاط عادی

مدرسان شریف



عنوان	صفحه
زیرمقیله‌ها	۸۳
مجموعه‌های تراز یک تابع	۸۴
کتگوری و فانکتورها	۸۸
فانکتور دوگان و فانکتور چند هم‌بردار	۹۰
سؤالات فصل پنجم	۹۱
پاسخنامه سؤالات فصل پنجم	۹۴
مسائلی برای چالش بیشتر	۹۸
فصل ششم: رتبه نگاشت‌های هموار و کلاف مماس	
قضیه رتبه ثابت	۹۹
قضیه‌های فروبری و مشتق - پوشا	۱۰۱
تصاویر نگاشت‌های هموار	۱۰۳
نگاشت‌های هموار به توی زیرمقیله‌ها	۱۰۵
صفحه مماس به یک رویه در $\mathbb{R}^3$	۱۰۶
درج مماس و تئوپولوژی روی آن	۱۰۷
ساختار منقذ روی کلاف مماس	۱۰۹
کلاف‌های برداری	۱۱۰
برش‌های هموار	۱۱۱
کنج‌های هموار	۱۱۲
سؤالات فصل ششم	۱۱۴
پاسخنامه سؤالات فصل ششم	۱۱۵
مسائلی برای چالش بیشتر	۱۱۸
فصل هفتم: افرازهای واحد و میدان‌های برداری	
توابع ضربه هموار	۱۱۹
افرازهای واحد	۱۲۲
وجود افراز واحد	۱۲۳
میدان‌های برداری و همواری آن‌ها	۱۲۶
خیم‌های انتگرال	۱۲۸
شارهای موضعی	۱۲۹
کروشه لی	۱۳۲
جلوبر میدان‌های برداری و میدان‌های برداری وابسته	۱۳۳
سؤالات فصل هفتم	۱۳۵
پاسخنامه سؤالات فصل هفتم	۱۳۷
مسائلی برای چالش بیشتر	۱۴۲

مدرسان شریف



فصل هشتم: گروه‌های لی و جبر لی

۱۴۳	گروه‌های لی
۱۴۶	زیرگروه‌های لی
۱۴۹	نمایی ماتریسی
۱۵۱	اثر یک ماتریس
۱۵۲	دیفرانسیل تابع دترمینان در نقطه همانی
۱۵۳	عمل‌های گروه
۱۵۵	جبرهای لی
۱۵۶	میدان‌های برداری چپ - ناوردا روی یک گروه لی
۱۵۸	جبر لی یک گروه لی
۱۵۸	گروه لی $gl(n, \mathbb{R})$
۱۵۹	جلوبر میدان‌های برداری چپ - ناوردا
۱۶۰	دیفرانسیل به عنوان یک همومورفیسم جبر لی
۱۶۱	سؤالات فصل هشتم
۱۶۳	پاسخنامه سؤالات فصل هشتم
۱۶۹	مسائل برای چالش بیشتر

فصل نهم: فرم‌های دیفرانسیل

۱۷۰	۱- فرم‌های دیفرانسیل
۱۷۱	دیفرانسیل یک تابع
۱۷۱	نمایش موضعی یک ۱- فرم دیفرانسیل
۱۷۲	کلاف کتانژانت
۱۷۲	توصیف ۱- فرم‌های هموار
۱۷۴	برگشت ۱- فرم‌ها
۱۷۵	تحدید ۱- فرم‌ها به زیرمنیفلدهای فروبرده شده
۱۷۶	k- فرم‌های دیفرانسیل
۱۷۷	نمایش موضعی برای یک k- فرم
۱۷۸	نقطه نگاه کلافی
۱۷۹	k- فرم‌های هموار
۱۷۹	برگشت k- فرم‌ها
۱۸۰	ضرب گوه‌ای
۱۸۱	فرم‌های ناوردا روی یک گروه لی
۱۸۲	سؤالات فصل نهم
۱۸۴	پاسخنامه سؤالات فصل نهم
۱۸۷	مسائلی برای چالش بیشتر

مدرسین
شریف

فصل دهم: مشتق خارجی و حاصل ضرب درونی

۱۸۸	 مشتق خارجی
۱۹۱	 برگشت مشتق خارجی
۱۹۳	 تحدید k - فرم ها به یک زیرمنیفلد
۱۹۴	 مشتق لی
۱۹۵	 مشتق لی یک میدان برداری
۱۹۷	 جابه جایی میدان های برداری
۱۹۹	 مشتق لی یک فرم دیفرانسیل
۲۰۰	 حاصل ضرب درونی
۲۰۱	 خاصیت های مشتق لی
۲۰۳	 فرمول های کلی برای مشتق های لی و خارجی
۲۰۴	 ضرب های ریمانی
۲۰۶	 نرم افزارهای ریمانی
۲۰۸	 سوالات فصل دهم
۲۱۰	 پاسخنامه سوالات فصل دهم
۲۱۶	 مسائلی برای چالش بیشتر

فصل یازدهم: جهت گیری ها

۲۱۹	 جهت های یک فضای برداری
۲۲۰	 جهت ها و n - هم بردارها
۲۲۱	 جهت های یک منیفلد
۲۲۳	 جهت ها و فرم های دیفرانسیل
۲۲۴	 جهت های یک ابر رویه
۲۲۶	 فرم حجم ریمانی
۲۲۷	 گروه تبدیلات و جهت پذیری $\mathbb{R}P^n$
۲۲۷	 ابر رویه های در منیفلدهای ریمانی
۲۲۸	 سوالات فصل یازدهم
۲۲۹	 پاسخنامه سوالات فصل یازدهم
۲۳۶	 مسائلی برای چالش بیشتر

فصل دوازدهم: انتگرال گیری روی منیفلدها

۲۳۷	 ناوردایی هموار دامنه در $\mathbb{R}^n$
۲۳۹	 منیفلدهای مرزدار
۲۴۰	 بردارهای مماس، فرم های دیفرانسیل و جهت ها
۲۴۱	 میدان های برداری نقطه ای - برون گرا
۲۴۱	 جهت مرزی

**مدرسان
شریف**

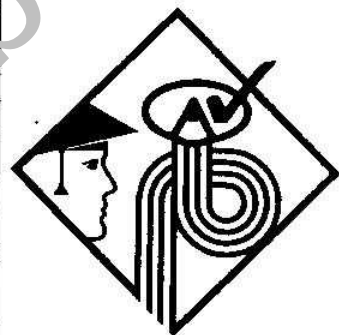


صفحه	عنوان
۲۴۲	انتگرال های خط
۲۴۵	انتگرال فرم های دیفرانسیل روی فضای اقلیدسی
۲۴۸	انتگرال روی منیفلدها
۲۵۱	قضیه استوکس
۲۵۳	انتگرال روی منیفلدهای ریمانی
۲۵۴	قضیه دیورژانس
۲۵۴	انتگرال های رویه
۲۵۶	سؤالات فصل دوازدهم
۲۵۷	پاسخنامه سؤالات فصل دوازدهم
۲۵۹	مسائلی برای چالش بیشتر

فصل سیزدهم: کوهمولوژی درام

۲۶۰	گروه های کوهمولوژی درام
۲۶۱	هموتوپای هموار
۲۶۳	رون بری های تغییر شکل
۲۶۳	نابری های هموتوپای
۲۶۶	محاسبات
۲۷۰	قضیه Mayer - Vietoris
۲۷۵	سؤالات فصل سیزدهم
۲۷۶	پاسخنامه سؤالات فصل سیزدهم
۲۸۰	مسائلی برای چالش بیشتر
۲۸۱	ضمیمه (۱): توپولوژی مجموعه های نقطه ای
۲۸۱	فضاهای توپولوژیک
۲۸۲	توپولوژی زیرفضایی
۲۸۲	پایه ها
۲۸۳	شمارای نوع اول و دوم
۲۸۳	اصول جداسازی
۲۸۴	توپولوژی حاصل ضربی
۲۸۴	پیوستگی
۲۸۵	فشردگی
۲۸۵	همبندی
۲۸۶	مؤلفه های همبندی
۲۸۶	بستار
۲۸۶	همگرایی
۲۸۸	ضمیمه (۲): قضیه تابع وارون روی $\mathbb{R}^n$ و نتایج مربوط به آن

مدرسین شریف



صفحه	عنوان
۲۹۰	ضمیمه (۳): جبر خطی.....
۲۹۰	فضاهای برداری خارج قسمتی.....
۲۹۰	تبدیلات خطی.....
۲۹۱	حاصل ضرب مستقیم و جمع مستقیم.....
۲۹۳	ضمیمه (۴): گروه سیمپلکتیک و کواترنیون ها.....
۲۹۳	نمایش تبدیلات خطی به وسیله ماتریس ها.....
۲۹۴	مزدوج کواترنیونی.....
۲۹۴	ضرب درونی کواترنیونی.....
۲۹۵	نمایش کواترنیون ها به وسیله عددهای مختلط.....
۲۹۵	H خطی بودن بر حسب عددهای مختلط.....
۲۹۶	گروه سیمپلکتیک.....
۲۹۷	واژه نامه انگلیسی به فارسی.....
۳۰۸	واژه نامه فارسی به انگلیسی.....
۳۱۸	فهرست راهنما.....
۳۲۲	مع و راجع.....

مدرسان
شریف

