

نخستین درس در منطق و نظریه مجموعه ها

برای دانش میانی علوم ریاضی

مهدی مایعی



دانشگاه صنعتی جندی شاپور دزفول

۱۳۹۴

سرشامه	:	بدیعی، مهدی، ۱۳۵۷-
عنوان و نام پدیدآور	:	نخستین درس در منطق و نظریه‌ی مجموعه‌ها : برای درس میانی علوم ریاضی
مشخصات نشر	:	دزفول: انتشارات دانشگاه صنعتی جندی شاپور دزفول، ۱۳۹۴.
مشخصات ظاهری	:	ج، ۲۰۲ ص.؛ جدول، نمودار.
شابک	:	۹۷۸-۶۰۰-۹۰۸۲۳-۹-۱
وضعیت فهرست نویسی	:	فیبای مختصر
یادداشت	:	فهرست نویسی کامل این اثر در نشانی: http://opac.nlai.ir قابل دسترسی است.
ردداشت	:	کتابنامه: ص. ۲۰۲-۲۰۱.
شماره کتاب. سی م	:	۳۹۸۸۵۲۲



شناسنامه کتاب

عنوان : نخستین درس در منطق و نظریه مجموعه‌ها

تألیف : مهدی بدیعی

ناشر : انتشارات دانشگاه صنعتی جندی شاپور دزفول

شابک : ۹۷۸-۶۰۰-۹۰۸۲۳-۹-۱

چاپ و صحافی : خدمات چاپ آیین احمد (ص)

طراح قالب جلد : محمد پاک‌نژاد

نوبت چاپ : اول - ۱۳۹۴

تیراژ : ۵۰۰

قیمت : ۹/۰۰۰ تومان

حق چاپ محفوظ است.

فهرست مطالب

مقدمه

پ

۱ مبانی منطقی

۱	گزاره و ترکیب گزاره‌ها	۱.۱
۹	استدلال قیاسی	۲.۱
۱۶	برهان درستی	۳.۱
۲۱	سورها	۴.۱

۲ مجموعه‌ها

۲۷	مجموعه و زیرمجموعه	۱.۲
۳۲	جبر مجموعه‌ها	۲.۲
۴۰	خانواده‌ی مجموعه‌ها	۳.۲

۳ رابطه و تابع

۴۹	حاصل ضرب و رابطه	۱.۳
۵۶	افراز و برخی از رابطه‌های خاص	۲.۳
۶۳	تابع	۳.۳
۷۱	توابع یک به یک، پوشا و دوسویی	۴.۳
۷۹	مجموعه‌های اندیس‌دار و حاصل ضرب	۵.۳

۸۷	اعداد حسابی	۴
۸۷	مجموعه‌ی اعداد حسابی	۱.۴
۹۱	جبر اعداد حسابی	۲.۴
۱۰۰	ترتیب اعداد حسابی	۳.۴
۱۰۵	متناهی، نامتناهی، شمارا و ناشمارا	۵
۱۰۵	هم‌توانی	۱.۵
۱۰۹	مجموعه‌های متناهی و نامتناهی	۲.۵
۱۱۹	مجموعه‌های شمارا و ناشمارا	۲.۵
۱۲۹	عدد اصلی، حساب اعداد اصلی	۶
۱۲۹	عدد اصلی، ترتیب اعداد اصلی	۱.۶
۱۳۵	حساب اعداد اصلی	۲.۶
۱۴۹	عدد ترتیبی و حساب اعداد ترتیبی	۷
۱۴۹	هم‌ریختی ترتیبی و مجموعه‌های خوش ترتیب	۱.۷
۱۵۷	عدد ترتیبی و ترتیب اعداد ترتیبی	۲.۷
۱۶۳	حساب اعداد ترتیبی	۳.۷
۱۸۱	اصل انتخاب و صورت‌های هم‌ارز با آن	۸
۱۸۱	بیان‌های مختلف اصل موضوع انتخاب	۱.۸
۱۸۴	اصول هم‌ارز با اصل موضوع انتخاب	۲.۸
۱۸۹	کاربرد لم تسورن	۳.۸

به نام خدا

در اواخر سال ۱۸۰۳ م. کانتور^۱ رسماً مجموعه‌ها را به طور شهودی معرفی کرد. پس از آن به ترتیب، بورالی-فورتی^۲ در ۱۹۸۷ م.، جرج کانتور در ۱۸۹۹ م. و برتراند راسل^۳ در ۱۹۰۲ م. به پارادکس‌های ناشی از آن تعریف شهودی دست یافتند. سپس تسرملو^۴، فرانکل^۵ اسکولم^۶ اصول موضوعه‌ی نظریه‌ی مجموعه‌ها را برای پرهیز از آن پارادکس‌ها به دست آمده، ارائه دادند و در نهایت گودل^۷ و کوهن^۸ سازگاری اصول موضر و نظریه‌ی طبیعی مجموعه‌ها را نشان دادند. در این فاصله‌ی زمانی که حدود یک قرن به طول انجامید، اندک اندک، نظریه‌ی مجموعه‌ها زیر بنای ریاضیات قرار گرفت و این ساز، جواز ورود به دنیای ریاضی، نظریه‌ی مجموعه‌ها شد. شایسته است بر در ورری این وادی نوشته شود: هر آن که نظریه‌ی مجموعه‌ها را نمی‌داند وارد نشود.

با این منظر، اولین درس جدی برای دانشجویان رشته‌ی ریاضی، مبانی علوم ریاضی با محتوای نظریه‌ی مجموعه‌هاست؛ البته، زبان و روش کار در این جبهه منطق است؛ پس در این درس، مسائل ابتدایی منطق نیز بیان می‌شود.

^۱Goreg Cantor

^۲Cesare Burali-Forti

^۳Bertrand arthur william Russel

^۴Ernst Zermlo

^۵Abraham Fraenkel

^۶Thoralf Albert Skolem

^۷Kurt Gödel

^۸Paul joseph Cohen

در درس مبانی علوم ریاضی، این نکته مهم است که دانشجویان در ابتدای راه هستند و هنوز خصایص دانش‌آموزی دارند؛ به این معنا که قدرت استدلال انتزاع آن‌ها ضعیف است و هر آن‌چه در استدلال دارند، قدرت استدلال شهودی است. از طرفی، مطلب انتزاع را نیز به سه قسمت تقسیم می‌کنیم: اول درک استدلال و مفاهیم انتزاعی، دوم قدرت تجزیه و تحلیل انتزاعی و یافتن استدلال انتزاعی مسأله و در نهایت، روش درست بیان و نگارش یک استدلال انتزاعی است. از طرفی دیگر، دانش‌جویان در هر سه مورد مذکور دارای کاستی و ضعف هستند؛ اما به نظر می‌رسد که این سه مورد را به یک‌باره نمی‌توان تدریس کرد. بنابراین با این پیش زمینه‌ی فکری، نگارنده این کتاب را به نگارش درآورده و سعی کرده که در آن، نکات مذکور رعایت نماید.

فصل اول که مربوط به دایمی منطق است، با مطالب ساده شروع می‌گردد. بخش به بخش که جلوتر می‌رویم، دانشجو با روش انتزاعی آشنا می‌گردد. در این فصل، هر آن‌چه را که مخاطب، برای پیش‌نیاز نظریه‌ی مجموعه‌ها نیاز دارد، ارائه شده است. شاید به نوعی، ذهن دانش‌آموز آماده می‌گردد تا در فصل دوم با مطالب کاملاً تزعای آشنا گردد. در این فصل، مجموعه‌ها و جبر آن‌ها را با روش اصول موضوعه پیش برده‌ایم. اصول فکری از پیش احاطه شده‌ی دانشجویان جدیدالورود به چالش کشیده می‌شود و می‌بیند که مطالبی را که قبلاً باون دلیل پذیرفته، باید استدلال کند. به این ترتیب، روش استدلالی انتزاعی نمود پیدا می‌کند، البته جای نگرانی نیست چرا که استدلال‌ها کوتاه هستند و دانشجو را خسته نمی‌کند. در فصل سوم، بنا بر ضرورت و بر طبق روال نظریه‌ی مجموعه‌ها، رابطه تاج مطرح شده است. در این فصل، اندک اندک از بار انتزاع مطالب کم شده است و از طرفی، بر پیچیدگی اثبات‌ها افزوده می‌شود تا جایی که اصل موضوع انتخاب، بیان می‌شود و در اثبات قضیه‌ای از آن سود برده‌ام. البته در بخش آخر این فصل، خانواده‌ی مجموعه‌های اندیس‌دار و حاصل ضرب یک خانواده از مجموعه‌ها و توابع بیان شده است. در فصل چهارم، اعداد حسابی و جبر اعداد حسابی را مطرح شده‌اند. در این فصل دانشجویان به این باور خواهند رسید که هر آن‌چه در ریاضی موجودیت می‌یابد مجموعه است و خواهد دید که اصل استقراء، یکی از اصول موضوعه نیست؛ بلکه

یکی از نتایج اصول موضوعی مجموعه‌هاست. دانشجویان مبتدی، هنوز با مفاهیم اندازه‌ی یک مجموعه و یا یک مجموعه‌ی خوش ترتیب آشنا نیستند، بنابراین به نظر مناسب نمی‌رسد که با ترتیب منطقی نظریه‌ی مجموعه‌ها مفاهیم اعداد ترتیبی، اعداد اصلی، متناهی، نامتناهی، شمارا و ناشمارا را معرفی کنیم. به این منظور از ترتیب معنایی نظریه‌ی مجموعه‌ها خارج می‌شویم. در فصل پنجم ابتدا مفاهیم متناهی و نامتناهی را مطرح شده‌اند و پس از آن با معرفی مجموعه‌های شمارا و ناشمارا مشاهده می‌شود که مجموعه‌های نامتناهی هم اندازه نیستند. برای معرفی مفهوم متناهی نامتناهی، روش‌های مختلفی وجود دارد در این فصل، سعی شده است از روشی متفاوت برای معرفی آن‌ها استفاده شود. در ادامه، در فصل ششم، بدون این که وارد پرستی‌هاست عدد اصلی شویم، برای هر مجموعه، یک اندازه معرفی می‌کنیم و با ترتیب آن‌ها نیز آشنا می‌شویم. در فصل هفتم، به یک مجموعه، یک ترتیب اضافه می‌کنیم و مجموعه‌های خوش ترتیب را معرفی می‌نماییم. باز بدون وارد شدن در مبحث ترتیب اعداد ترتیبی این مفهوم، برای هر مجموعه‌ی خوش ترتیب، یک اندازه معرفی می‌کنیم و ضرب آن را آورده شده است. در آخرین فصل از این نوشتار، اصول موضوعی چالش برانگیز نظریه‌ی مجموعه‌ها، یعنی اصل موضوع انتخاب به این ترتیب مطرح شده است. ابتدا، بیان‌های مختلف آن را مطرح کرده‌ایم و پس از آن، صورت‌های هم‌ارز با آن، اثبات هم‌ارزی، بیان شده‌اند و در نهایت، کاربردهایی از آن آورده شده است. یکی از مهم‌ترین و پرکاربردترین صورت‌های هم‌ارز با اصل انتخاب، لم تسورن است. کاربرد این اصل در مقاطع بالاتر، بیش‌تر نمایان می‌گردد. در بخش کاربردهایی از لم تسورن، کاربردهایی از آن در توپولوژی، جبر مشبک و نهایتاً در نظریه‌ی مجموعه آورده شده است؛ البته نگارنده به هیچ وجه نمی‌تواند ادعا کند که این کاربردها بهترین مثال‌ها می‌باشند.

یک دانشجوی مبتدی خوب، دارای قدرت شهود خوبی است و نقطه‌ی ضعفش در قسمت انتزاع است؛ از این رو، در دوره‌ی کارشناسی سعی زیادی می‌شود که قدرت انتزاع آن‌ها تقویت شود، اما به این ترتیب از قدرت شهود دانشجویان غفلت می‌شود. برای این منظور در بیان مطالب سعی کرده‌ام مطالب انتزاعی را همراه با مطالب شهودی معرفی کنم و تا آن‌جا که در توانم بوده است، از شکل استفاده

کنم. برای معرفی مجموعه‌ها در حالت عام، از مجموعه‌ی نامتناهی و اندیس‌هایی در اعداد حسابی و یا طبیعی، استفاده کرده‌ام تا بیان آن‌ها ساده‌تر گردد. شاید کسانی که اهل فن باشند بر ما خرده بگیرند چرا شکل‌ها را در مجموعه‌های شمارا محدود کرده است. نخست این که همان‌طور که گفته شد، این شکل‌ها در این حالت، ساده‌تر خواهند شد و دوم این که در این اشکال با توجه به این که هر مجموعه را می‌توان خوش‌ترتیب کرد و هر مجموعه‌ی خوش‌ترتیب نامتناهی دارای یک قطعه‌ی یکرخت با اعداد $\mathbb{N}$ مابی است.

در پابا، نگارنده، این که این کتاب را خالی از اشکال نمی‌بیند. لذا خود را نیازمند انتقاد مبدی، تا تواند از اشکالات آن بکاهد.

مهدی بدیعی

شهریورماه ۱۳۹۴