

۱۲۵۴۵۷۸
۹۶/۸/۹

هندسه متوسطه مبانی و مفوم‌ها

ویژه دبیران و قابل استفاده
دانش آموزان علاقمند

www.ketab.ir

محمود نصیری



پیشروان (پروانه نشر: ۲۶۲۳)



مبتکران (پروانه نشر: ۱۶۷/۱۰۲)

هندسه متوسطه مبانی و مفاهیم



قیمت: ۲۳۰۰۰ تومان

مؤلف: محمود نصیری
نوبت چاپ: اول ۱۳۹۴
شمارگان: ۳۰۰۰ جلد
حروف نگاری: مبتکران
لیتوگرافی: امیرگرافیک
چاپ: گنج حروف

هر نوع استفاده تجاری و بازرگانی از این کتاب: اعم از باز نویسی، خلاصه نویسی، نقل مطالب، استفاده از پرسش ها، زیراکس، ضبط کامپیوتری، کتاب الکترونیکی، لوح فشرده (CD)، شبکه های اطلاع رسانی، انواع بزرگراه های اطلاع رسانی نظیر اینترنت و هر نوع تکثیر دیگر: اعم از دیجیتالی و سنتی، کلاو جز تا بدون اجازه کتبی ناشر ممنوع و قابل تعقیب قانونی است.

مرکز پخش: تهران میدان انقلاب، خیابان فخر رازی، خیابان نظری شرقی، پلاک ۵۹، کدپستی ۱۳۱۴۷۶۴۹۶۴
تلفن: ۰۲۱-۶۱۰۹۴۰۰۰ دورنگار ۶۱۰۹۴۱۵۵

www.mobtakeran.com

به نام خدا

مقدمه

در مقدمه تاریخی که در ابتدای کتاب بیان کرده‌ایم، مشاهده خواهید کرد که هندسه یکی از پرتلاطم‌ترین شاخه‌های ریاضی بوده است. حتی در روش‌هایی که امروزه نیز در ساختار هندسه مطرح می‌شوند، این مشکل مشهود است. از یک سو به دلیل سابقه تاریخی و از سوی دیگر با پیشرفت هندسه‌های جدید این چالش‌ها به وجود آمده‌اند. متأسفانه در کشور ما در مورد روش‌های آموزش و نگارش ساختار هندسه در دوره‌های متوسطه تحول چندانی صورت نگرفته است. حتی نمادهای به کار رفته در کتاب‌های درسی هندسه، مطابق با قراردادهایی که در کتاب‌های مختلف دنیا امروزه مطرح می‌شوند، نمی‌باشند. هرچند به دلیل برگزاری مسابقات المپیادهای ریاضی با مسایل زیادی از هندسه روبه‌رو می‌شویم، اما در چگونگی آموزش و آرایه مفاهیم جدید هندسه بی‌توجه بوده‌ایم. یکی از هدف‌های اصلی این کتاب آشنایی با آرایه مفهوم‌های هندسه بر طبق استانداردهای موجود دنیا می‌باشد. سعی شده است که ساختار هندسه از ابتدا به طور رسمی و با آرایه تعریف‌ها و اثبات‌های دقیق و رعایت پی در پی مطالب، بررسی شود. اگر قبول داشته باشیم که هندسه مقدماتی ارزش کاملاً فهمیدن را دارد، نیاز به چنین کاری داریم، تا اولاً، مدرسانی که عهده دار تدریس هندسه می‌باشند با آن به طور دقیق آشنا شوند. ثانیاً، در نوشتن هندسه در مقطع‌های پائین‌تر، بتوانیم تعریف‌ها و اثبات‌های غیررسمی را، براساس تعریف‌ها و اثبات‌های رسمی و دقیق چنان بیان کنیم که تناقضی ایجاد نشود. در سطح دبیرستان، این اندازه دقت لزومی ندارد اما می‌توانیم با ساده‌تر بیان کردن آن‌ها، در فهماندن مطالب درسی به دانش‌آموزان کمک کنیم. روشی را که برای ساختار هندسه انتخاب کرده‌ایم روش متریک می‌نامند، که اساس آن بر اعداد حقیقی استوار است و مفهوم‌های فاصله و بینیت و هم‌نهشتی پاره‌خط‌ها را به کمک آن می‌توانیم به ساده‌ترین روش مطرح کنیم. سعی شده است که به جنبه‌های تاریخی قضیه‌های مشهور هندسه نیز توجه شود. به جز فصل دهم که شامل مطالب پیشرفته‌تر هندسه است و می‌تواند مورد استفاده شرکت‌کنندگان در المپیادها واقع شود، بقیه فصل‌ها جنبه آموزش کلی برای مدرسان و دانش‌آموزان علاقمند را دارد. به همین دلیل در بقیه فصل‌ها از طرح مسایل معماگونه هندسه پرهیز شده است و به مسایلی پرداخته‌ایم که هم کاربردی‌تر و هم تعداد زیادی از دانش‌آموزان بتوانند از عهده حل آن‌ها برآیند. امروزه آشنایی مختصری با هندسه‌های غیراقلیدسی نیز برای دانش‌آموزان مفید خواهد بود، بنابراین در فصل اول و هم‌چنین فصل سوم توصیف کوتاهی از این نوع هندسه‌ها را مشاهده خواهید کرد.

هرچند که حل مسایل هندسه با همان روش هندسی محض زیبایی خاص خود را دارد، اما نباید به روش‌های دیگر حل مساله‌های هندس بی‌توجه باشیم. به همین دلیل در فصل ششم، مثلثات و هندسه با هم مطرح شده‌اند، تا روش‌های مثلثاتی حل مسایل هندسه نیز مورد توجه واقع شوند.

مهم‌ترین فصل کتاب فصل تبدیلات هندسی است. چون تبدیلات یکی از مفاهیم اساسی و کلیدی هندسه هستند پس باید یکی از موضوع‌های آموزش هندسه باشند. هندسه تبدیلاتی اخیراً در اکثر کشورهای دنیا به خوبی آموزش داده می‌شوند. به همین دلیل علاوه بر بررسی دقیق طولی‌ها و تبدیل‌های تشابهی مسایل متنوع و کاربردی از آن‌ها مطرح شده است.

این کتاب می‌تواند مرجع خوبی برای دبیران ریاضی و دانش‌آموزان علاقه‌مند و به ویژه دانش‌آموزانی که خود را برای شرکت در المپیادها آماده می‌کنند باشد.

امیدوارم که تالیف این کتاب قدمی هرچند کوچک در اعتلای دانش این مرز و بوم بر باشد. در پایان لازم می‌دانم از جناب آقای یحیی دهقانی مدیر مسئول محترم انتشارات مبتکران که امکان چاپ این کتاب را فراهم کردند، تشکر و قدردانی کنم. همچنین از خانم لیلی میرزائی که با تلاش فراوان زحمت صفحه‌آرایی کتاب را کشیدند و خانم سمانه ایمانفرد که رسم شکل‌ها با زحمت فراوان برعهده داشتند و نیز خانم مینا هرمزی که طراحی جلد کتاب را انجام دادند، سپاسگزارم و برای آن‌ها آرزوی موفقیت روزافزون دارم.

محمود نصیری

فهرست

کاربردهای دیگر اصل توازی	۸۰
قضیه پاره خط میانگین	۸۰
قضیه هم‌رسی ارتفاع‌ها، میانه‌ها، نیمسازها	۸۱
هم‌نهشت بودن دو میانه، دو ارتفاع، دو نیمساز در مثلث	
متساوی‌الساقین	۸۳
تمرین ۶	۸۵

فصل ۴. چهار ضلعی‌ها، مساحت نواحی و قضیه فیثاغورث

چهار ضلعی‌ها	۸۸
پاره خط میانگین در دوزنقه و چهار ضلعی	۹۲
نواحی چند ضلعی و مساحت	۹۴
مساحت و نقاط شبکه‌ای	۹۷
کاربرد مساحت در حل مساله	۹۹
قضیه فیثاغورث	۱۰۱
تمرین ۷	۱۰۵

فصل ۵. تصویرهای موازی و تشابه

تصویرهای موازی	۱۱۰
تشابه	۱۱۳
تشابه چند ضلعی‌ها	۱۱۷
مثلث شبه قائمه	۱۱۸
تعمیمی از قضیه فیثاغورث و قضیه پاپوس	۱۱۸
عکس قضیه نیمسازها و دو مساله	۱۲۱
دایره آپولونیوس	۱۲۲
تمرین ۸	۱۲۳

فصل ۶. مثلثات و هندسه

مساحت مثلث و متوازی‌الاضلاع	۱۲۹
قضیه سینوس‌ها	۱۳۰
محاسبه شعاع دایره محیطی	۱۳۱
قضیه کسینوس‌ها	۱۳۲
ویژگی‌هایی از ارتفاع	۱۳۵
فرمول‌های مجموع و تفاضل	۱۳۶
تمرین ۹	۱۳۷

مقدمه تاریخی	۷
--------------	---

فصل ۱. هندسه وقوع - فاصله - زاویه - منطق

هندسه وقوع	۱۶
اصل‌های هندسه وقوع	۱۷
مستقل بودن و سازگاری	۱۸
فاصله و اصل خط‌کش	۲۰
متریک‌ها	۲۲
اصل استقرار خط‌کش و قضیه نقطه‌یابی	۲۳
مجموعه محدب - اصل جداپذیری صفحه	۲۶
زاویه	۲۷
اندازه زاویه و اصل نقاله	۲۹
قضیه وجود و یکتایی عمود	۳۱
منطق ریاضی و اثبات‌ها	۳۲
قضیه‌هایی که از اصل جداپذیری صفحه نتیجه می‌شوند	۴۱
قضیه قطعه‌بر	۴۲
تمرین ۲	۴۳

فصل دوم. هم‌نهشتی - نامساوی‌های مثلثی

هم‌نهشتی مثلث‌ها	۴۶
توضیح‌هایی در مورد واژه‌ها	۵۳
تمرین ۳	۵۵
نامساوی‌های هندسی - قضیه زاویه بیرونی	۵۶
رسم خط عمود بر یک خط	۵۷
وجود موازی‌ها قضیه زاویه متبادل درونی	۵۸
سه نامساوی در مثلث	۵۹
قضیه لولا	۶۰
بیش‌ترین و کم‌ترین فاصله	۶۱
ویژگی عمود و مایل	۶۲
هم‌نهشتی مثلث‌های خاص	۶۳
ویژگی مهم نیمساز	۶۶
تمرین ۴	۶۸

فصل سوم. اصل توازی و نتیجه‌های آن

معادل بودن اصل پنجم و اصل توازی	۷۵
نتیجه‌های اصل توازی	۷۵
تمرین ۵	۷۹

نگاشت‌ها و تبدیل‌ها به روش تحلیلی.....	۲۱۶
کاربردهای تبدیلات در حل مسائل.....	۲۱۹
تبدیل‌های تشابهی.....	۲۲۵
تجانس.....	۲۲۶
تمرین ۱۳.....	۲۳۴

فصل ۱۰. رابطه‌های طولی - نامساوی‌ها در هندسه و

مبحث‌های پیشرفته‌تر

رابطه‌های طولی و قضیه استیوارت.....	۲۴۰
ویژگی‌هایی از ارتفاع‌ها در مثلث.....	۲۴۳
خط اویلر در مثلث.....	۲۴۵
دایره ۹ نقطه.....	۲۴۶
همرسی خط‌ها در مثلث.....	۲۴۷
قضیه سوا.....	۲۴۸
هم‌خطی نقاط و قضیه منلائوس.....	۲۵۰
قضیه دزارگ.....	۲۵۱
نامساوی‌ها در هندسه.....	۲۵۲
تغییر متغیر در اندازه‌های ضلع‌های مثلث.....	۲۵۵
نامساوی کوشی شوارز.....	۲۵۷
نامساوی اردیش مردل.....	۲۵۸
تمرین ۱۴.....	۲۶۲

پاسخ تشریحی تمرین‌ها

پاسخ تمرین ۱.....	۲۶۷
پاسخ تمرین ۲.....	۲۶۹
پاسخ تمرین ۳.....	۲۷۱
پاسخ تمرین ۴.....	۲۷۲
پاسخ تمرین ۵.....	۲۷۵
پاسخ تمرین ۶.....	۲۷۸
پاسخ تمرین ۷.....	۲۸۱
پاسخ تمرین ۸.....	۲۸۷
پاسخ تمرین ۹.....	۲۹۲
پاسخ تمرین ۱۰.....	۲۹۶
پاسخ تمرین ۱۱.....	۳۰۱
پاسخ تمرین ۱۲.....	۳۰۳
پاسخ تمرین ۱۳.....	۳۱۰
پاسخ تمرین ۱۴.....	۳۲۰
فهرست مراجعه.....	۳۲۸

فصل ۷. دایره - رابطه‌های طولی - ترسیم‌های هندسی

دایره.....	۱۴۰
قضیه مماس.....	۱۴۲
کمان دایره.....	۱۴۳
زاویه‌های محاطی و ظلی.....	۱۴۵
قضیه وجود مثلث.....	۱۴۷
رسم مماس بر دایره.....	۱۴۸
قضیه کمان درخور.....	۱۵۰
رابطه‌های طولی در دایره.....	۱۵۱
تمرین ۱۰.....	۱۵۴
ترسیم‌های هندسی.....	۱۵۹
تمرین ۱۱.....	۱۶۶

فصل ۸. چهارضلعی‌های محاطی و محیطی منتظم

دایره‌های محاطی مثلث.....	۱۶۸
چهارضلعی‌های محاطی و محیطی.....	۱۶۹
قضیه بطلمیوس.....	۱۷۱
چندضلعی‌های منتظم.....	۱۷۲
نسبت طلایی و رسم پنج‌ضلعی منتظم.....	۱۷۴
محیط و مساحت دایره.....	۱۷۷
تمرین ۱۲.....	۱۸۱

فصل ۹. تبدیل‌های هندسی

بازتاب.....	۱۸۶
جهت شکل‌ها.....	۱۸۸
نگاشت و تبدیل‌های هندسی.....	۱۸۹
ترکیب دو تبدیل.....	۱۹۰
ایزومتري‌ها یا طولی‌ها.....	۱۹۲
انتقال.....	۱۹۴
دوران.....	۱۹۷
انعکاس لغزنده یا لغزه.....	۲۰۱
قضیه ترکیب سه بازتاب.....	۲۰۳
هندسه تبدیلاتی.....	۲۰۴
اصل بازتاب و تعریف کلی هم‌نهشتی.....	۲۰۵
ترکیب طولی‌ها.....	۲۰۷
تقارن‌های یک شکل.....	۲۰۹
گروه تبدیلات.....	۲۱۱
فرش کردن.....	۲۱۲

مقدمه تاریخی

ریاضیات یونان پیش از اقلیدس

یونانی‌ها حق مصری‌ها در ابداع هندسه را محترم داشته‌اند. مصریان باستان و بابلی‌ها ریاضیات خود را روی پاپیروس‌ها و لوحه‌های گلی پخته به خوبی مکتوب کرده بودند و اقلیم خشک این مناطق به حفظ و نگهداری این مدارک کمک کرده و اکنون به دست ما رسیده است. در این یافته‌ها مدارکی از تأثیر ریاضیات هندی نیز مشاهده می‌شود.

مصری‌ها و بابلی‌ها در محاسبات عددی، و حتی در سطح ابتدایی جبر، مانند حل مسایل بهره مرکب مهارت داشته‌اند. طغیان سالیانه رود نیل و به طبع آن محو شدن مرزهای زمین‌های کشاورزی باعث شده بود تا مصری‌ها نقشه‌برداران ماهری شوند. مصری‌ها و بابلی‌ها مهندسان فوق‌العاده‌ای بودند، اهرام مصر، ساختمان‌های چند طبقه بزرگ، زمین‌های کشاورزی طبقه‌بندی شده و سیستم آبیاری گسترده از شواهد این امر است. باستان‌شناسان مدارک زیادی از محاسبات ریاضی بر روی لوحه‌های گلی یافته‌اند که شامل ضرب، توان، ریشه دوم، توان سوم و ریشه سوم است.

بابلی‌ها و مصری‌ها روش حل معادله‌های درجه دوم را برای ریشه‌های صحیح و مثبت آموخته بودند. و آن‌ها را از طریق مربع کامل حل می‌کردند. در هندسه بابلی‌ها و مصری‌ها خواص مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع ۳-۴-۵ را می‌شناختند که حداقل حالت خاصی از قضیه فیثاغورث است. فرمول
$$\frac{(AB+CD)(BC+AD)}{4}$$
 را برای محاسبه مساحت چهارضلعی به کار می‌برده‌اند. البته این فرمول فقط برای مستطیل جواب درست ارایه می‌دهد.

در حالی که مصریان و بابلیان دانش گسترده‌ای از مفاهیم ریاضیات داشته‌اند (برخی درست و برخی نادرست) در یونان برای نخستین بار مطرح شد که فرمول‌ها و مفاهیم هندسه باید بر اساس استدلال بنا شود و نه بر اساس مقایسه و مشاهده. این مشخص نیست که چگونه و چرا این اتفاق افتاده، اما این مساله یک تغییر بزرگ در چگونگی تفکر مردم بوده است. مردم یونان

پیشینه بحث و استدلال در مسائل فلسفی را داشته‌اند برای جهت‌دار بودن این مباحثه‌ها و وضع قوانین برای آن‌ها، دانشمندانی چون سقراط و ارسطو و افلاطون قوانین سخت‌گیرانه منطق را وضع کردند.

درباره ریاضیات اولیه در یونان باستان اطلاعات اندکی در دسترس است و نوشتارهای زیادی باقی نمانده است. زیرا نوشته‌ها و طومارها به دلیل تفاوت اقلیم یونان با اقلیم کویری مصر و بابل، بیش‌تر از بین رفته‌اند.

البته در کتاب اصول اقلیدس، وی موفق شده است که متون قبل از خود را تا حدودی جمع‌آوری کند. از ریاضی‌دان‌های قبل از اقلیدس، افراد اندکی را می‌شناسیم. اولین و مؤثرترین آن‌ها تالس است «۵۴۶ تا ۴۶۴ قبل از میلاد» او در مصر تحصیل کرده و اولین فردی بوده است که قوانین استدلال منطقی را وارد هندسه کرده و او اولین اثبات‌ها را در هندسه ارایه کرده است. تعدادی از این اثبات‌ها را در زیر مشاهده می‌کنید. (در تمام این جملوها کلمه برابری یا تساوی به کار برده شده است که به معنی همان انطباق یا هم‌نهشتی امروزی است.)

تمام زاویه‌های مثلث متساوی‌الاضلاع برابراند.

اگر دو خط یکدیگر را قطع کنند زاویه‌های روبه‌رو برابراند.

اگر دو مثلث دو زاویه و ضلع بین مساوی داشته باشند، با هم مساوی‌اند.

زاویه محاطی مقابل به نیم‌دایره قائمه است.

تقریباً تمام این مفاهیم شناخته شده بودند و بعضی از آن‌ها توسط بابلیان مطرح شده بود، اما اعتبار اثبات آن‌ها برای اولین بار به تالس رسید. هرچند که این اثبات‌ها در مقابل اثبات‌هایی که اقلیدس ارایه داد بسیار ساده و ابتدایی به نظر می‌رسید. اما این اثبات‌های ابتدایی سنگ بنای این تفکر بودند که ریاضیات را باید با اثبات به پیش برد، نه با مشاهده مستقیم و اندازه‌گیری و یا به عنوان یک باور عقیدتی مطرح نمود.

فیثاغورث «Pythagoras» از شهر ساموس «Samos» «۵۷۰-۵۰۰ قبل از میلاد» احتمالاً مطالب نوشته شده توسط تالس را مطالعه کرده بود. او به مصر مسافرت کرده و گویا از

افلاطون «۳۷۴ - ۴۲۸ قبل از میلاد» قبل از این که آکادمی خود را در آتن بنا کند به مصر و سپس به جنوب ایتالیا به دیدار فیثاغورثان می‌رود. او خود یک ریاضی‌دان نبود، اما هندسه را به عنوان عرصه جالبی برای تفکرات منطقی می‌ستود. از جانب او نقل شده است، که بر سر در آکادمی خود نوشته بود، «هرکس هندسه نمی‌داند وارد نشود» او نوشته که هندسه ناب‌ترین تمرین برای مغز است، به‌خصوص برای فلاسفه و کشورداران.

در توصیف آموزش مناسب و مفید وی چنین نوشته است: هندسه روان را به سمت حقیقت هدایت می‌کند و روح فلسفه را بیدار می‌کند... هیچ چیز دیگری چنین تأثیری را بر آدمی ندارد... در تمام علوم، تجربه ثابت کرده است که هرکس که هندسه آموخته، به‌طور قابل ملاحظه‌ای در یادگیری و درک مطالب سریع‌تر از کسی بوده است که هندسه نمی‌دانسته است.

مانند فیثاغورث، افلاطون هم معتقد بود که معمای جهان در عدد و در شکل است. به نظر وی پروردگار همواره قواعد هندسی را به کار می‌برد، و از این‌رو مطالعه هندسه مقدمه‌ای ضروری برای مطالعه فلسفه است.

بعدها افلاطون هندسه را علمی که از ازل تا به ابد وجود داشته توصیف کرده است. او بیان کرده که خط کاملاً راست و دایره کاملاً بی‌عیب و نقص وجود خارجی ندارد. بر این اساس او نتیجه می‌گیرد که باید عالم دیگری وجود داشته باشد که در آن همه چیز کامل و بی‌نقص باشد که روح ما قبل از تولد در آن عالم می‌زیسته است. واقعیت زندگی روزمره پژوهاک حقیقی از این عالم بی‌نقص است و هندسه مطالعه این عالم ایده‌آل است که ساکن ذهن می‌باشد.

مطالعه هندسه جریانی است که باعث بیداری این مهارت و دانش فطری می‌شود، و ذهن را برای فراگیری عدالت و نیکی آماده می‌کند، که این دو هدف غایی فلسفه افلاطون می‌باشد. بیش از ۲۰۰۰ سال بعد نقش هندسه به عنوان یک محصول فطری ذهن انسان، سنگ بنای فلسفه اما نونل کانت بر آن قرار گرفت.

باتوجه به مشکلاتی که تعریف، نقطه، خط و غیره برای فیثاغورث پیش آورده بود، افلاطون برای واضح شدن مفاهیم اساسی اقدام کرد. تعدادی از تعریف‌های افلاطون و احتمالاً یکی دوتا از اصل‌های وی بعداً توسط اقلیدس در کتاب اصول آورده شده است. قدیمی‌ترین روش منظم برای تعیین دنباله‌ای از طول‌ها که یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل می‌دهند به وی نسبت

هند، هم دیدن کرده بود. او پایه‌گذار جامعه‌های مخفی در سرزمین‌های یونان در جنوب ایتالیا بوده است که این جامعه‌ها تا حدود ۲۰۰ سال پابرجا بوده‌اند. تمام کشف‌های این مردمان به نام این جامعه تمام شده است، به همین دلیل بیان این که کجا و کی و توسط چه کسی انجام شده است تقریباً غیر ممکن است. فیثاغورث اهمیت ویژه و اسرارآمیزی به اعداد می‌داده است، به گونه‌ای که از او نقل شده است که «همه چیز عدد است» این مهم باعث افزایش توجه به مطالعه بر روی علم اعداد شد، که موجب دستاوردهای قابل تقدیری در ریاضیات به ویژه نظریه اعداد گردید. وی در هندسه نیز خدمات ارزنده‌ای انجام داد. ویژگی‌های خطوط موازی، محاسبه جمع زاویه‌های درونی مثلث و صد البته، قضیه فیثاغورث.

جالب‌ترین کشف فیثاغورث، اثبات وجود اعداد اصم یا گنگ می‌باشد. عددی را گنگ گوئیم که نتوان آن را به صورت یک کسر بادو عدد صحیح در صورت و مخرج نوشت. اثبات گنگ بودن $\sqrt{2}$ به همان گونه که توسط ارسطو ثابت شد معمولاً در کتاب‌های دبیرستانی امروزی نیز به همان صورت ثابت می‌شود. که $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ فرض کرده و به تناقض می‌رسیم.

گنگ بودن $\sqrt{2}$ به طور اساسی پایه نظریه‌های فیثاغورثیان (پیروان فیثاغورث) را زیر سؤال برد. آن‌ها اعتقاد داشتند که پاره‌خط از تعداد متناهی نقطه تشکیل شده است.

کشف اعداد گنگ نادرست بودن این ادعا را اثبات می‌کرد. سوگند رازداری طرفداران فیثاغورث مانع اطلاع رسانی این کشف در عالم ریاضی شد و اعداد گنگ دیرتر جای خود را در استدلال‌های منطقی ریاضی باز کرد. گفته شده که یکی از طرفداران فیثاغورث هنگامی که در یک سفر دریایی بوده این راز را برای شخصی افشا کرده و هنگامی که دریا طوفانی شده در دریا غرق شده است (نشانه‌ای از غضب خدایان) در برخی روایات گفته‌اند که همکار او، وی را به دریا پرت کرده است.

کشف این مفاهیم منطقی، احتمالاً باعث شده است که هندسه را به صورت منطقی پایه‌گذاری کنند. به نظر می‌رسد یکی از اعضای مخفی جامعه فیثاغورثیان، هیپوکراتس «Hippocrates - ۴۱۰ - ۴۷۰ قبل از میلاد» اولین کسی بوده است که هندسه را با چند تعریف ساده همانند دانه‌های زنجیری از استدلال‌های منطقی توسعه و بسط داده است.

اقلیدس نهایت سعی خود را به کار برد تا اصطلاح‌های هندسه را تعریف کند. مثلاً «نقطه» را «چیزی که هیچ جزء ندارد» تعریف کرد. یا خط مستقیم را چنین تعریف کرد، خطی که به نحوی هموار بر نقاطی که بر خود هستند قرار داشته باشد. به همین ترتیب صفحه را تعریف کرد.

اما چنانچه امروزه می‌دانیم این تعریف‌ها نمی‌توانند کارساز باشند. زیرا برای فهمیدن آن‌ها باید قبلاً تصویری از هریک از آن‌ها داشته باشیم.

هم‌چنین اقلیدس اصطلاح یا عبارت‌هایی را بدون آن که اصولی در مورد آن‌ها بیان کرده باشد پذیرفته است؛ مانند، بین بودن (بینیت در اصطلاح امروزی) یا طرفین یک خط که از آن‌ها زیاد استفاده کرده است. هم‌چنین بدون آن که مفهوم حرکت را در هندسه تعریف کند، انطباق‌های هندسی را به کمک حرکت اثبات کرده است. هم‌چنین او در بعضی از اثبات‌ها، تعدادی از قضیه‌ها را بدون اثبات به کار برده است. اما با همه این نقص‌ها به جرأت می‌توان گفت که این اثر در مدت دو هزار سال بزرگ‌ترین اثر علمی بوده است و در بیش از دو هزار سال قبل این نقص‌ها کاملاً طبیعی بوده‌اند. اقلیدس، هندسه‌ی خود را بر اساس پنج اصل موضوع و چند اصل متعارف بنا نهاد. چون از نظر تاریخی این اصول موضوعه دارای اهمیت می‌باشند، آن‌ها را مرور می‌کنیم.

۱. از هر دو نقطه‌ی متمایز، یک خط می‌گذرد.
 ۲. هر پاره‌خط را می‌توان از هریک از دو طرف، به اندازه‌ی پاره‌خط معلومی امتداد داد.
 ۳. به هر مرکز و هر شعاعی می‌توان یک دایره رسم کرد. امروزه که زبان مجموعه‌ها در ریاضی به کار برده می‌شود این اصل نتیجه‌ای از نگره مجموعه‌ها است که بیان می‌کند؛ دایره مجموعه نقطه‌هایی مانند M از صفحه است که از یک نقطه ثابت O به فاصله معلومی باشند.
 ۴. همه زاویه‌های قائمه با یک‌دیگر برابرند.
- این جمله، هم‌نهشتی یا انطباق همه زاویه‌های قائمه را با یک‌دیگر بیان می‌کند، که در اساس، مساوی بودن اندازه زاویه‌های قائمه است (امروزه در شکل‌های هندسی چیزی به معنی تساوی نداریم. تساوی در هندسه به معنی «همانی» است. دو پاره‌خط متمایز هم‌اندازه یا دو زاویه متمایز هم‌اندازه قابل انطباق‌اند، هیچ‌گاه مساوی نیستند.)

داده می‌شود. وی نشان داد طول‌های $n^2 - 1$ ، $2n$ ، $n^2 + 1$ چنین مثلثی را تشکیل می‌دهند. ($n > 1$)

اقلیدس Euclid

دوران فیثاغورث و اقلیدس را دوران طلایی هندسه می‌نامند. در مورد زندگی خود اقلیدس چیز زیادی نمی‌دانیم، اقلیدس شاگرد مکتب افلاطون بوده است.

اقلیدس یکی از مشهورترین ریاضی‌دان‌های یونان و شاید موفق‌ترین نویسنده علمی است که تاکنون زندگی می‌کرده است. کتاب اصول سیزده جلدی او در باب هندسه و نظریه اعداد است. برای بیش‌تر از ۲۰۰۰ سال هر دانش‌آموخته ریاضی هندسه را از کتاب اقلیدس یاد گرفته است. و در تمام این زمان‌ها، «مبانی» به عنوان الگویی برای برهان منطقی عمل می‌کرده است.

هیچ‌کس تا به امروز نمی‌داند که چه قدر از هندسه موجود در کتاب مبانی (اصول) از زمان اقلیدس ریشه می‌گیرد. با نگارش این شاهکار، اقلیدس تجربه و کارهای پیشینیان خود در قرن‌های جلوتر را، گردآوری کرده است. بخشی از آن ممکن است بر پایه کتاب‌های قبل از آن باشد و بخشی از مهم‌ترین نظریات آن به گمان، مربوط به «اودکسوس» «Eudoxus» که حدوداً در همان زمان زندگی می‌کرده، می‌دانند.

در هر صورت، از تمام کتاب‌هایی که از ابتدا تا حال برای ما موجود بوده است، مبانی اولین کتابی است که هندسه را به صورت مرتب و منظم و روند منطقی با شروع فرض‌های ساده و بنا کردن هندسه روی آن‌ها با برهان منطقی ارائه می‌دهد. این همواره یک روش اساسی در ریاضی بوده است. منطق همان نقشی را در ریاضی دارد که آزمایش در فیزیک. در ریاضی و فیزیک شما ممکن است به نظریه‌ای برسید که فکر می‌کنید درست است، در فیزیک بهتر است به آزمایشگاه بروید و آن را آزمایش کنید و در ریاضی بهتر است شما بیش‌تر فکر کنید و سعی کنید به برهانی برای آن برسید. روش اصل موضوعی که اقلیدس به کار برد، الگویی است برای آن‌چه ما امروزه ریاضی محض می‌نامیم. محض به معنی «اندیشه محض» است. هیچ تجربه عینی برای تحقیق درستی احکام لازم نیست، تنها باید مراقب استدلال در اثبات قضیه‌ها باشیم.

پاریس ارایه داد. در آن زمان هیلبرت به خاطر کارهایش بر روی فرم‌های جبری شهرت یافته بود و کتاب مشهور خود را درباره مبانی هندسه یا بنیادهای هندسه نوشته بود. هیلبرت در کتاب خود اصل‌هایی را که هندسه اقلیدسی بر آن استوار است تحلیل کرد و توضیح داد که چگونه تحقیقات جدید مبتنی بر بدیهیات، توانسته است از دستاوردهای یونانیان فراتر رود. هیلبرت در خطابه خود در سال ۱۹۰۰ کوشید روند پژوهش ریاضی دهه‌های گذشته را دریابد و خطوط اصلی کار خلاق آتی را ترسیم کند. با ارایه خلاصه‌ای از طرح‌های او، درک بهتری از معنای ریاضیات قرن نوزدهم حاصل می‌شود. او بدعت دو هزار و چند ساله را در مورد هندسه می‌شکند.



«هیلبرت»

۱۸۶۲-۱۹۴۳

از او نقل شده است که می‌گفته: آدمی باید همیشه به جای نقطه، خط و صفحه بتواند میز، صندلی، لیوان و غیره بگوید، به بیان دیگر چون هیچ‌یک از ویژگی‌های نقطه، خط و صفحه غیر از ویژگی‌هایی نیستند که توسط اصول در اثبات‌ها و استدلال‌ها به کار می‌روند بنابراین می‌توانید این اشیاء هندسی را به هر نامی که دلتان می‌خواهد بنامید.

اصول هندسه هیلبرت به پنج گروه تقسیم می‌شوند:

۱. اصل‌های وقوع
۲. اصل میان بود یا بینیت
۳. اصل هم‌نهشتی
۴. اصل پیوستگی
۵. اصل توازی

هیلبرت، نقطه، خط، صفحه، بینیت و انطباق را «تعریف نشده» در نظر می‌گیرد و برای آنها اصولی را بیان می‌کند. این روش بیان هندسه، مشکل است و برای سطح مقدماتی توصیه نمی‌شود. به مدت کوتاهی بعد از آن، روش‌های دیگری در ارایه هندسه مطرح گردید.

در سال ۱۹۳۲ جرج دیوید بیرک‌هف (George D. Birkhoff)، ریاضی‌دان آمریکایی اصولی را برای هندسه

۵. اگر خطی راست دو خط راست دیگر را قطع کند و دو زاویه داخلی که در یک طرف این خط پدید می‌آیند، کم‌تر از زاویه قائمه باشند آن‌گاه اگر این دو خط تا بی‌نهایت امتداد یابند، در طرفی که این دو زاویه، کم‌تر از قائمه هستند یک‌دیگر را قطع می‌کنند.



«اقلیدس»

این اصل که به اصل توازی معروف است، یکی از جذاب‌ترین مسائلی بوده است که در حدود دو هزار سال عده زیادی از ریاضی‌دان‌ها در صدد اثبات آن از روی اصول دیگر برآمده. در این میان از خیام و خواجه نصیر طوسی نیز می‌توان نام برد اما همه این تلاش‌ها با شکست روبه‌رو شد.

در هر دوره از تاریخ که ریاضی‌دان‌ها به بررسی هندسه اقلیدسی پرداخته‌اند همواره چهار اصل اول اقلیدس به سادگی مورد پذیرش آن‌ها قرار گرفته است، اما اصل پنجم تا قرن نوزدهم همواره مورد شک بوده است، و همین شک و تردیدها بود که منجر به کشف هندسه‌های نااقلیدسی گردید.

دوران هندسه‌های جدید

در فصل خطوط موازی در مورد پیدایش این هندسه‌ها مطالبی را بیان خواهیم کرد. فقط این را بیان می‌کنیم که تا حدود ۲۰۰ سال قبل تغییر چندانی در هندسه رخ نداد، اما بعد از آن انقلابی دیگر در هندسه به وجود آمد. نه تنها کشف این هندسه‌های نااقلیدسی، هندسه اقلیدسی را تضعیف نکرد بلکه باعث شد تا هندسه اقلیدسی به طور دقیق‌تر منظم شود و تمام ایرادهایی را که از زمان اقلیدس به بعد به آن وارد بود برطرف شود. اولین کاری که در این زمینه صورت گرفت کارهایی است که دیوید هیلبرت «David Hilbert» یکی از ریاضی‌دان‌های بزرگ ربع اول قرن بیستم در کتاب «مبانی هندسه‌اش» در سال ۱۸۹۹ منتشر کرد. داوید هیلبرت، استاد دانشگاه گوتینگن، در سال ۱۹۰۰ بیست و سه طرح تحقیقاتی به کنگره ریاضی‌دانان در

اجزاء اصل‌ها به همان صورتی که در اصل‌های هیلبرت و بیرکھف هستند، در اصل‌های SMSG نیز حفظ شده‌اند. بیست و دو اصل در مجموعه اصول SMSG می‌توانند به دسته‌های زیر تقسیم شوند:

اصول وقوع - اصول درباره اندازه طولی - اصل مربوط به رابطه‌های فضا - اصل جدایی - اصول اندازه زاویه‌ای - اصل هم‌نهستی یا انطباق - اصل توافقی و اصل درباره اندازه سطح و حجم.

به دلیل اهمیت این اصل‌ها در پایه‌گذاری هندسه و این که هرگز این اصل‌ها به طور منسجم در کشور ما به طور رسمی مطرح نشده‌اند آن‌ها را همراه با توضیحی در مورد هریک، بیان می‌کنیم.

اصول یا بندهای SMSG

۱. دو نقطه متمایز مفروض‌اند، دقیقاً یک خط شامل آن دو وجود دارد.

اگر A و B دو نقطه متمایز باشند خط شامل این دو نقطه را با نماد $\overline{AB}$ نشان می‌دهیم.

این اصل، معادل اولین اصل هیلبرت و بیرکھف است که تنها اصل وقوع بین نقاط و خط‌ها است.

به کمک سه اصل بعدی مفهوم فاصله برقرار می‌شود، به همان روشی که بیرکھف مطرح کرده بود.

۲. اصل فاصله - به هر دو نقطه متمایز، عدد حقیقی مثبتی متناظر است. این عدد فاصله بین دو نقطه نامیده می‌شود. اگر A و B دو نقطه باشند، $d(A, B) = AB$ را فاصله بین A و B می‌نامیم.

۳. اصل خط‌کش - بین نقاط یک خط و مجموعه اعداد حقیقی یک تناظر یک به یک می‌توان برقرار کرد به طوری که هر نقطه خط متناظر دقیقاً یک عدد حقیقی است و هر عدد حقیقی متناظر دقیقاً یک نقطه است و فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی متمایز، قدرمطلق تفاضل اعداد متناظر آن‌ها است.

۴. اصل استقرار خط‌کش - دو نقطه P و Q از یک خط مفروض‌اند، دستگاه مختصاتی می‌توانیم چنان انتخاب کنیم که مختص P صفر و مختص Q عددی مثبت باشد.

به کمک اصل (۳) می‌توانیم یک خط را به محور اعداد یا خط‌کش تبدیل کنیم. برقرار کردن یک تناظر یک به یک بین نقاط یک خط و مجموعه اعداد حقیقی به ما اجازه می‌دهد که مفهوم فاصله به طور طبیعی قابل فهم باشد.

مطرح کرد که تعدادی از آن‌ها با اصول هیلبرت و اقلیدس متفاوت است. این عمل او یک روش جدید برای هندسه مقدماتی و خبری مهم در هندسه دبیرستانی بود.

بیرکھف با استفاده از اعداد حقیقی، روش بسیار ساده‌ای را در تعریف مفاهیم بینیت و قابلیت انطباق ارائه می‌دهد. به همین دلیل این روش ارائه هندسه را روش متریک می‌نامند.

روش ارائه شده توسط بیرکھف مبنایی برای نوشتن هندسه در سطح‌های مختلف می‌شود. اصل‌های بیرکھف تا سال ۱۹۵۰ چندان مورد توجه قرار نگرفتند تا این که در سال ۱۹۵۸ گروهی در آمریکا به وجود آمد که متشکل از ریاضی‌دانان و دانشمندانی از اتحاد جماهیر شوروی سابق نیز بودند. این گروه بنیادی به نام «National Science Foundation» NSF را پایه‌گذاری کردند.



«بیرکھف»

اولین اقدام NSF برقراری یک برنامه‌ی آموزشی همگانی ریاضی در سطح مدارس بوده است.

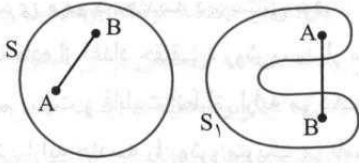
«SMSG» (School Mathematics Study Group)

انجام چنین عملی فرصتی را فراهم ساخت تا SMSG مجموعه اصول جدیدی را برای هندسه اقلیدسی تدوین و ارائه کند. با وجودی که خیلی از مواد ارائه شده توسط SMSG مورد انتقاد و سرانجام کنار گذاشته شد، اما بیش‌تر اصول ارائه شده قویاً پذیرفته شد و به طور وسیع در مدارس و کالج‌ها ادامه یافت و کتاب‌های درسی فراوانی بر اساس آن نوشته شد. SMSG امیدوار بود که اصول ارائه شده برای دانش‌آموزان قابل درک و استفاده باشد.

کلمات تعریف نشده در SMSG عبارت‌اند از: نقطه، خط و صفحه.

واژه‌ی «شامل» همواره با چند واژه دیگر به صورت تعریف نشده نمی‌باشند، اگرچه آن‌ها همان نقشی را بازی می‌کنند که واژه‌های تعریف نشده به وسیله هیلبرت به کار برده شده‌اند.

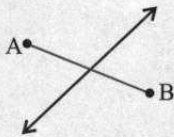
رسم شده مجموعه S محدب است اما مجموعه S_1 محدب نمی‌باشد. مجموعه نقاط یک مثلث، محدب نیست. چرا؟



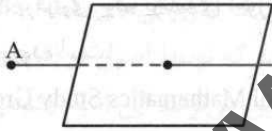
اما اجتماع یک مثلث و مجموعه‌ی نقاط درون آن، یک مجموعه‌ی محدب است.

۹. اصل جدایی صفحه. یک خط و صفحه شامل آن مفروض اند، مجموعه‌ی همه نقاط صفحه که روی خط واقع نیستند اجتماع دو مجموعه جدا از هم اند به‌طوری که:

۱. هریک از این دو مجموعه محدب‌اند.
۲. اگر A متعلق به یکی از این مجموعه‌ها و B متعلق به دیگری باشد، آن گاه پاره خط $\overline{AB}$ آن خط را می‌برد.



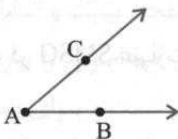
۱۰. اصل جدایی فضا. نقاطی از فضا که غیرواقع بر یک صفحه مفروض باشند اجتماع دو مجموعه‌اند به‌طوری که:
۱. هریک از دو مجموعه محدب‌اند.



۲. اگر A متعلق به یکی از این مجموعه‌ها و B متعلق به مجموعه دیگر باشد پاره خط $\overline{AB}$ آن صفحه را می‌برد.

اصول مربوط به اندازه زاویه

زاویه در هندسه به وسیله نقاط دو نیم خط شکل می‌گیرد. به طور دقیق‌تر، یک زاویه، اجتماع دو نیم خط است که دارای یک ابتدا باشند، اما روی یک خط واقع نباشند.



اگر یک زاویه اجتماع $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ باشد، این نیم‌خط‌ها را اضلاع زاویه و A را رأس زاویه می‌نامند و خود زاویه را با نماد $\angle BAC$ نشان می‌دهند.

علاوه بر آن اصل (۴) وجود یک دستگاه مختصات را برای هر خط چنان مشخص می‌کند که یک نقطه متناظر صفر و نقطه دیگری با مختص مثبت روی آن بتوانیم در نظر بگیریم. چهار اصل بعدی زمینه‌ای برای ساختن فضای سه بعدی ایجاد می‌کند. این چهار اصل همراه با اصل (۱) به اصول وقوع معروف‌اند؛ هر دو نقطه متمایز، خط یکتایی را مشخص می‌کنند و هر سه نقطه غیرواقع بر یک خط، یک و فقط یک صفحه را مشخص می‌کنند. ۶ اصل بعدی، همه در اصل‌های هیلبرت نیز دیده می‌شوند.

۵. هر صفحه، شامل حداقل سه نقطه غیر واقع بر یک خط است. فضا، حداقل شامل ۴ نقطه غیرواقع بر یک صفحه است.

۶. اگر دو نقطه روی یک صفحه واقع باشند، آن گاه خط شامل آن‌ها نیز در همان صفحه واقع است.

۷. هر سه نقطه، حداقل روی یک صفحه‌اند و هر سه نقطه‌ی غیر هم‌خط دقیقاً روی یک صفحه‌اند.

۸. اگر دو صفحه‌ی متمایز، متقاطع باشند، آن گاه اشتراک آن‌ها یک خط است.

قبل از بیان اصل بعدی، چند تعریف را بیان می‌کنیم. برخلاف اصول هیلبرت که بینیت تعریف نشده و اصولی برای آن بیان شده است، به کمک اصول فوق می‌توانیم بینیت را به سادگی تعریف کنیم.

بینیت و پاره‌خط

نقطه B بین نقاط A و C است، هرگاه A ، B و C هم‌خط باشند و مختص B بین مختص‌های A و C باشد، یا $AB + BC = AC$. به کمک بینیت می‌توانیم پاره‌خط و نیم‌خط را تعریف کنیم.

اگر A و B دو نقطه متمایز باشند، پاره‌خط $\overline{AB}$ که آن را با نماد $\overline{AB}$ نشان می‌دهیم قسمتی از خط AB است که شامل A و B و تمام نقاط خط AB هستند که بین A و B می‌باشند. A و B را نقاط انتهایی پاره‌خط می‌نامند.

طول $\overline{AB}$ فاصله بین دو نقطه A و B است.

مجموعه محدب و جدایی

مجموعه‌ی S را محدب می‌نامیم هرگاه برای هر دو نقطه A و B از S ، تمام پاره‌خط $\overline{AB}$ نیز در S واقع باشد. در شکل‌های

کرده است اما بعداً به آن ایرادهایی گرفته شد که در قسمت‌های دیگر بررسی می‌کنیم. هم‌چنین هیلبرت نیز انطباق پاره‌خط‌ها و انطباق زاویه‌ها را یک رابطه‌ی هم‌ارزی در نظر می‌گیرد و اصولی را برای آن‌ها بیان می‌کند که مفهوم انطباق را بسیار پیچیده می‌کند، در حالیکه در روش متریک یا همان روشی که از اصول بیرکف نشأت می‌گیرد چون فاصله و اعداد حقیقی را به کار می‌بریم، انطباق پاره‌خط‌ها به سادگی تعریف می‌شود.

دو پاره‌خط قابل انطباق‌اند، هرگاه اندازه‌های آن‌ها برابر باشند:

$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \Leftrightarrow AB = CD$$

دو زاویه قابل انطباق‌اند، هرگاه اندازه‌های آن دو برابر باشند:

$$\angle ABC \cong \angle A'B'C' \Leftrightarrow m\angle ABC = m\angle A'B'C'$$

در مورد مثلث نیز اقلیدس حالت انطباق ض - ز - ض را به صورت قضیه اثبات کرد که بعداً به آن ایرادهایی گرفته شد که بیان کردیم. اما SMSG این حالت را به صورت اصل بیان می‌کند. حتی در بعضی مدارس دو حالت ض - ض - ض و ض - ز - ض را نیز بدون اثبات یعنی به عنوان اصل مطرح می‌کنند.

۱۵. اصل SAS (ض - ز - ض)

فرض کنیم بین دو مثلث یا یک مثلث و خودش یک تناظر یک به یک برقرار باشد. اگر دو ضلع و زاویه شامل آن دو ضلع از مثلث اول با اجزاء متناظرش از مثلث دوم نظیر به نظیر هم‌نهشت یا قابل انطباق باشند آن‌گاه دو مثلث قابل انطباق یا هم‌نهشت‌اند.

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \overline{AC} \cong \overline{A'C'}, \angle A \cong \angle A' \\ \Leftrightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

۱۶. اصل توازی

از یک نقطه‌ی غیرواقع بر یک خط، حداکثر یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد.

اصل‌های ۱۷ تا ۲۰ در مورد مساحت ناحیه‌ها در صفحه است. ۱۷. به هر ناحیه چندضلعی، عدد حقیقی مثبت یکتایی نظیر است است که آن را مساحت آن ناحیه می‌نامند.

۱۸. اگر دو مثلث هم‌نهشت باشند، ناحیه‌های مثلثی آن‌ها دارای مساحت مساوی‌اند.

۱۹. اگر ناحیه R ، اجتماع دو ناحیه R_1 و R_2 باشد که اشتراک آن‌ها حداکثر پاره‌خط‌ها و نقاط متناهی باشند، ن‌گاه مساحت R برابر مجموع مساحت‌های R_1 و R_2 است.

۱۱. اصل اندازه‌پذیری زاویه

به هر زاویه، عددی حقیقی بین 0° و 180° نظیر است که آن را اندازه‌ی آن زاویه می‌نامیم. اندازه‌ی یک زاویه $\angle ABC$ را به $m\angle ABC$ نشان می‌دهیم.

۱۲. اصل ساختن زاویه.

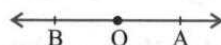
فرض کنیم AB نیم‌خطی روی مرز نیم‌صفحه H باشد. برای هر عدد حقیقی r بین 0° و 180° دقیقاً یک نیم‌خط AP وجود دارد که P در H است و $m\angle PAB = r$.

۱۳. اصل جمع زاویه‌ها.

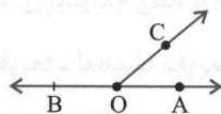
اگر D نقطه‌ای درون $\angle BAC$ باشد آن‌گاه:



$$m\angle BAC = m\angle BAD + m\angle DAC$$



اگر O نقطه‌ای روی خط $\overline{AB}$ بین A و B باشد $\overline{OA}$ و $\overline{OB}$ دو نیم‌خط متقابل می‌نامند.



اگر $\overline{OA}$ و $\overline{OB}$ دو نیم‌خط متقابل باشند، و $\overline{OC}$ هر نیم‌خط صومی باشد آن‌گاه زاویه‌های $\angle AOC$ و $\angle COB$ را مجانب گویند.

۱۴. اصل مکمل

دو زاویه‌ی مجانب، مکمل‌اند؛ یعنی، مجموع اندازه‌های آن‌ها 180° است.

قابلیت انطباق یا هم‌نهشتی

راجع به هم‌نهشتی یا قابلیت انطباق مثلث‌ها که یکی از اساسی‌ترین مفاهیم هندسه است، بعداً بیش‌تر بحث خواهیم کرد. اقلیدس در مورد انطباق پاره‌خط‌ها و زاویه‌ها بحثی نمی‌کند و انطباق دو مثلث را در حالت ض - ز - ض به عنوان قضیه اثبات

خود را در توپولوژی ادامه داد و چندین کتاب در مورد توپولوژی پیشرفته نوشته است. درواقع می‌توان موئیز را یکی از پیشگامان هندسه به سبک نوین دانست.



«ادوین موئیز»

اخیراً هندسه به روش تبدیلاتی نیز رو به گسترش است و حتی در دوره‌های مقدماتی تبدیلات هندسی به خوبی ارایه می‌شود. در هندسه تبدیلاتی با پذیرش اصلی به نام اصل بازتاب یا انعکاس می‌توانیم اصل ض - ز - ض را ثابت کنیم و در نتیجه روش سومی نیز در هم‌نهشتی‌ها ارایه می‌شود. در فصل‌های بعدی این کتاب به طور جامع تبدیلات هندسی را بررسی می‌کنیم و راجع به مفاهیم فوق توضیح خواهیم داد. اکنون که تاریخچه‌ای مختصر از روند هندسه از ابتدا تا امروز بیان کردیم، از این‌جا به بعد، روند ساختن هندسه را که امروزه در اکثر کتاب‌های دنیا و کشورهای دنیا به همین صورت است دنبال می‌کنیم.

۲۰. مساحت مستطیل برابر حاصل ضرب اندازه‌های قاعده و ارتفاع آن است.

و بالاخره آخرین اصول MSG مربوط به حجم هستند.

۲۱. حجم مکعب مستطیل برابر است با حاصل ضرب اندازه ارتفاع در مساحت قاعده.

۲۲. اصل کاوالیری. دو جسم و یک صفحه مفروض‌اند. اگر برای هر صفحه که موازی صفحه مفروض باشد و هر دو جسم را قطع کند اگر در هر حالت مساحت‌های مقطع‌های حاصل برابر باشند، آن‌گاه حجم‌های این دو جسم برابراند.

یکی از افرادی که در MSG فعالیت زیادی داشت ادوین موئیز بود «Edwin E. Moise» ۱۹۹۸ - ۱۹۱۸.

او از سال ۱۹۴۷ تا ۱۹۶۰ استاد ممتاز دانشگاه میشیگان بود و سپس به هاروارد رفت و در سال‌های ۱۹۶۷ و ۱۹۶۸ رئیس انجمن ریاضی آمریکا بود. اولین پیش‌نویس اصول MSG توسط موئیز نوشته شد. او اولین کتاب هندسه دبیرستانی به سبک جدید و براساس اصول ارایه شده در MSG را به کمک دانز «downs» که معلم کالج بود در سال ۱۹۶۴ نوشت (ترجمه فارسی این کتاب نیز وجود دارد). همچنین او کتاب میانی هندسه‌ای به نام هندسه مقدماتی به روش پیشرفته نیز نوشت. که قسمتی از ترجمه فارسی این کتاب نیز وجود دارد. موئیز کار