



برنامه ریزی احتمالی

تألیف و ترجمه: دکتر یحیی زارع مهرجردی
دانشیار و عضو هیئت علمی دانشکده صنایع - دانشگاه یزد

سرشناسه : زارع مهرجردی، یحیی، ۱۳۳۲ -
 عنوان و نام پدیدآور : برنامه‌ریزی احتمالی/تالیف یحیی زارع مهرجردی.
 مشخصات نشر : تهران: انتشارات مهرجرد، ۱۳۹۳.
 مشخصات ظاهری : ۱۶۰ ص: مصور.
 شابک : ۹۷۸-۶۰۰-۷۲۳۰-۰۶-۰
 وضعیت فهرست نویسی : فیبا
 موضوع : برنامه‌نویسی تصادفی
 موضوع : برنامه‌نویسی پویا
 رده بندی کنگره : ۱۳۹۳ ۴۲/۵۷۷۹۲
 رده بندی دیویی : ۵۱۹/۷۰۳
 شماره کتابشناسی ملی : ۲۶۲۷۶۵۸



برنامه‌ریزی احتمالی

تالیف: دکتر یحیی زارع مهرجردی

شمارگان: ۱۰۰ نسخه

چاپ اول: ۱۳۹۳

قیمت: ۱۲۰۰۰ تومان

تهران، میدان انقلاب، خیابان اردیبهشت، بن بست مبین، پلاک ۶

تلفن: ۶۶۴۹۱۹۰۲ و ۶۶۴۱۴۸۱۹-۲۰

مراکز پخش:

انتشارات نص: تهران، میدان انقلاب، خیابان اردیبهشت، بن بست مبین، پلاک ۶

تلفن: ۶۶۴۰۵۳۷۲ و ۶۶۹۵۲۸۸۳-۴

شابک: ۹۷۸-۹۶۴-۷۲۳۰-۰۶-۰

فهرست مطالب

۷	مقدمه مترجم
۲۱	مقدمه مؤلف
۲۵	فصل اول : برنامه ریزی آماری
۵۵	فصل دوم : مسائل تصمیم گیری
۱۱۹	فصل سوم : معادلات محدود کننده شانس

مقدمه مترجم

وقتی در مدل‌های برنامه ریزی ریاضی پارامترها از نوع متغیر تصادفی باشند از برنامه ریزی احتمالی برای حل مسائل استفاده می‌شود. اگر توزیع احتمالی متغیر تصادفی معلوم باشد مسئله باریسک در ارتباط بوده ولی اگر توزیع حداقل یک متغیر نا معلوم باشد مسئله با نامعینی در ارتباط است. نظریه های مربوط به ریسک وعدم اطمینان در برنامه ریزی ها از اوایل دهه ۱۹۵۰ میلادی در مقالات و کتابهای علمی شروع به پیدایش کرده اند.

در برنامه ریزی خطی وقتی یک یا پیش از یک معادله محدود کننده بتواند برای درصد خاصی از زمان، مثلاً ۹۰ درصد، قانع شود از مفهوم برنامه ریزی شانس به عنوان یک وسیله برای مشخص ساختن درجه عدم حفظ شرایط معادله محدود کننده (قابلیت اعتماد معادله) می‌توان استفاده کرد.

برنامه ریزی شانس توسط دانشمندان برجسته پروفیسور آبراهام چارنز و ویلیام کوپر در عرصه ادبیات برنامه ریزی احتمالی معرفی گردیده و بعداً توسط اشخاصی مثل کاتانوگا، پان و پاپ، هیلیر، کاربون، جنوفرین، اپورز، وتز، وجدا، سینگوپتا، تینتر، برینو، دنتدیک، پریکوپا و این نگارنده توسعه و به کار بسته شده است. مفهوم برنامه ریزی شانس را می‌توان با معرفی مسئله برنامه ریزی خطی بنحو بهتر تعریف کرد. یک مسئله برنامه ریزی خطی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{Maximize } C'X \quad (1)$$

S.t.

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

به شرط اینکه بردارهای c ، b و ماتریس A به ترتیب نمایش منفعت، منابع اولیه و ضرایب تکنولوژی باشند. علاوه، فرض می‌شود که A یک ماتریس $m \times n$ بعدی، b یک بردار $m \times 1$ بعدی، c یک بردار $1 \times n$ بعدی و x بردار مجهولات $n \times 1$ بعدی باشد.

چارنز و کوپر الگوهای ریاضی " E "، " V " و " P " را برای اندازه‌گیری مقدار "مورد انتظار تابع هدف"، "واریانس" و "احتمال اینکه تابع هدف روی ناحیه امکانپذیر پیش فرض بهینه شود" را معرفی کردند. الگوی برنامه ریزی ریاضی نوع " E " را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\text{Maximize } E(C'X) \quad (۲)$$

S.t.

$$P(Ax \leq b) = r$$

$$x \geq 0$$

الگوی V مربع خطای میانگین را کمینه می‌کند. تابع هدف برای مدل مربع خطا را می‌توان به صورت

$$E[CX - C^0x^0]^2$$

نوشت. اختلاف اساسی بین الگوی " E " و الگوی " V " در تابع هدف آنها است. اگر مربع خطای میانگین را روی فضای امکانپذیری که درست همسان فضای امکانپذیر الگوی E است در نظر گرفته شود آن‌گاه مدل‌های " E " و " V " معادلات محدود کننده محسوب را مشابه منظور می‌کنند. برنامه الگوی V به شکل زیر است:

$$\text{Minimize } E[C'X - C^0x^0]^2 \quad (۳)$$

S.t.

$$P(Ax \leq b) = r$$

$$x \geq 0$$

تابع هدف الگوی " V " رابطه بین مؤلفه‌های هزینه را در نظر می‌گیرد.

چهارنوع مدل P در تحقیق در عملیات معرفی شده‌اند. برای نخستین بار چارلز و کوپر مدل P را به صورت زیر تعریف کردند:

$$\text{Maximize } P[C'X \geq K] \quad (۴)$$

S.t.

$$P(Ax \leq b) = r$$

$$x \geq 0$$

انگیزه مسئله (۴) پیشنهادی سازی احتمال دستیابی به مقدار پیش فرض K بوده مشروط به اینکه مؤلفه‌های هزینه متغیر تصادفی با تابع توزیع شناخته شده باشد.

بورینو^۱ (۱۹۶۴) به این مسئله "برنامه ریسک کمینه"^۲ در سطح K می‌گوید. سیمون در کتاب "مدل انسان"^۳ راجع به قانع سازی به جای بهینه سازی یک تابع (هدف) صحبت می‌کند.

الگوهای ریاضی گوناگون را می‌توان با تشخیص ضرایب تکنولوژی، منابع و فاکتورهای هزینه به شکل متغیرهای تصادفی بسط و توسعه داد. چهار نوع تابع هدف توسط اکثر محققین و پژوهشگران پذیرفته شده که عبارتند از:

۱. محک مورد انتظار^۴
۲. محک پرتفولیو^۵
۳. محک فراکتایل^۶
۴. محک آسپیریشن^۷

با احتساب توابع هدف چهارگانه فوق و با توجه به اینکه حداقل یکی از پارامترهای نوع A، b و یا c می‌توانند در مدل برنامه‌ریزی خطی (۱) از نوع متغیر تصادفی باشند تعداد زیادی

1- Bereanu (1964)

2- Minimal risk

3- Model of man

4- Expected Value Criteria

5- Portfolio Criteria

6- Fractile Criteria

7- Aspiration Criteria

مسئله احتمالی را می‌توان تعریف کرد. جنوفریون و سینگوپتا مدل‌های بهینه سازی زیر را برتر ترجیح داده‌اند:

مدل نوع انتظار

$$\text{Minimize } E(CX) \quad (5)$$

S.t.

$$x \in X$$

مدل نوع پرتفولیو

$$\text{Minimize } Z = x^T W x \quad (6)$$

S.t.

$$E(Cx) \leq B$$

$$x \in X$$

مدل فراکتایل

$$\text{Minimize } U$$

S.t.

$$P(C^T x \leq u) = r$$

$$x \in X$$

مدل اسپیرایشن

$$\text{Minimize } \{P(C^T x) | x \in X\}$$

S.t.

$$P(C^T x) = F\left\{\frac{r - E(C^T x)}{\sqrt{x^T W x}}\right\}$$

در این معادله F نمایش تابع توزیع نرمال استاندارد است.

یکی از معایب اصلی استفاده از مدل‌های برنامه‌ریزی شانس وقتی ضرایب تکنولوژی از نوع متغیر تصادفی با تابع توزیع شناخته شده می‌باشند نیاز به استفاده از الگوریتم برنامه‌ریزی غیرخطی برای حل مسئله مدل قطعی آن می‌باشد. در مواردی که ضرایب تکنولوژی

متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع نرمال می‌باشند مدل قطعی (مدل EDF) آن به صورت زیر تعریف می‌شود.

(۹)

$$\text{Maximize } \sum_{j=1}^n C_j x_j$$

S.t.

$$\sum_{j=1}^n \bar{a}_j x_j + q \left\{ \sum_{j=1}^n \sigma_{aj}^2 x_j \right\}^{\frac{1}{2}} \leq bi \quad i = 1$$

$$A_2 x \leq b_2$$

$$x \geq 0$$

بطوریکه $\bar{a}_j$ و σ_{aj}^2 به ترتیب نمایش میانگین و واریانس مؤلفه j ام a می‌باشند. مسئله EDF فوق بر مبنای میزان ریسک $r > 0.5$ بنا شده است. مقدار $q = N^{-1}(r)$ را می‌توان از جدول توزیع نرمال استاندارد بدست آورد.

دومین گروه مسئله برنامه‌ریزی شانس که از خانواده مدل اسپیرایشن شناخته شده به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\text{Maximize } f$$

(۱۰)

S.t.

$$P(C'x \geq f) = r$$

$$P(A_1 x \leq b_1) = r_1$$

$$A_2 x \leq b_2$$

$$x \geq 0$$

به شرط اینکه

C = بردار متغیر تصادفی هزینه $(1 \times n)$ بعدی

x = بردار متغیر مجهول $(n \times 1)$ بعدی

r = مقدار آن بین ۰ تا ۱ تغییر می‌کند $(0 < r < 1)$

r_1 = مقدار آن بین ۰ تا ۱ تغییر می کند ($0 < r_1 < 1$)

b_1 = متغیر تصادفی سطح منبع اولیه

A_1 = بردار $1 \times n$ بعدی ضرایب تکنولوژی

اگر متغیر تصادفی b_1 دارای تابع توزیع نرمال با میانگین $\bar{b}_1$ و واریانس $\sigma_{b_1}^2$ باشد و متغیر C دارای تابع توزیع نرمال چندگانه (multinormal) با بردار میانگین $\bar{C} = (\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_n)$ و ماتریس واریانس - کوواریانس V باشد آن گاه $C'x$ تابع توزیع نرمال با میانگین $\bar{C}'x$ و واریانس $x'Vx$ می باشد. بنابراین، مدل برنامه ریزی قطعی خطی معادل مسئله فوق را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\text{Maximize } f(x) = \bar{C}'x - q(x'Vx)^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

S.t.

$$Ax \leq b^*$$

$$x \geq 0$$

به شرط اینکه داشته باشیم:

$$b^* = (b_1^*, b_2)'$$

$$b_1^* = \bar{b}_1 - q\sigma_{b_1}^2$$

مدلهای برنامه ریزی خطی قطعی معادل (۹) و (۱۱) که از خانواده مسایل برنامه ریزی غیرخطی می باشند را می توان با استفاده از روشهای بهینه سازی غیرخطی کلاسیک حل کرده و نتایج حاصل را تجزیه و تحلیل نمود.

مسایل برنامه ریزی شانس برای نظریه بازیها^۱

با منظور کردن نظریه بازیهای دو نفره با مجموع صفر^۲ که "ماتریس بازدهی"^۳ آن متغیر تصادفی است مسئله برنامه ریزی شانس برای یکی از بازیکن ها را می توان به صورت زیر نوشت.

1- Game Theory

2- Zero Sum Game

3- Payoff Matrix

$$\text{Maximize } \delta \quad (12)$$

S.t.

$$P(\text{Min } p^T A q \geq \delta) = \alpha$$

$$p^T e_m = 1 \quad p \geq 0$$

$$p^T e_n = 1 \quad q \geq 0$$

مسئله برنامه ریزی بازیکن دیگر را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\text{Minimize } p \quad (13)$$

S.t.

$$P(\text{Max } p^T A q \geq \delta) = \beta$$

$$p^T e_m = 1 \quad p \geq 0$$

$$q^T e_n = 1 \quad q \geq 0$$

در مدل های (۱۲) و (۱۳) e_m و e_n به ترتیب نمایش بردارهای $m \times 1$ و $n \times 1$ بعدی بوده که همه عناصر آنها ۱ می باشد و α و β نمایش احتمالات داده شده هستند. اصول تصمیم گیری^۱ بازیکن بیشینه ساز و q رقیب وی باید از مرتبه صفر^۲ باشند. چون مسایل بیشینه سازی و کمینه سازی بازیها نمایش بازی مجموع صفر با اصول تصمیم گیری مرتبه صفر می باشد به این نوع مسئله برنامه ریزی بازیهای شانس صفر - صفر^۳ گفته می شود. مسئله قطعی معادل مسئله بازیکن بیشینه ساز را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\text{Maximize } \delta \quad (14)$$

S.t.

$$p^T e_m = 1 \quad p \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^m p_i \gamma_{ij} \geq \delta \quad j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^m [1 - F_{ij}(\gamma_{ij})] \geq \alpha \quad j = 1, \dots, n$$

$$\gamma_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} \text{از نظر علامت} \\ \text{مقید نمی باشد} \end{array} \right\}$$

به طوری که:

$F_{ij}(0)$ معرف تابع توزیع a_{ij} می باشد.

اگر $\alpha > \frac{1}{2}$ و $\beta > \frac{1}{2}$ باشند آن گاه رابطه زیر برای هر جواب امکان پذیر بازیکن بیشینه ساز برقرار است.

$$\delta \leq \text{Min } p$$

بنابراین، فقط نصف روابط عادی بین توابع هدف مسایل برنامه ریزی خطی زوجیت برقرار می باشد (متأسفانه رابطه)

$$\text{Max } \delta = \text{min } p$$

الزاماً برقرار نمی باشد ولی ممکن است در موارد خاصی صادق باشد)

شبکه ها

مسایل شبکه ها را هم می توان با کمک برنامه ریزی شانس مطالعه کرد. چارنز و کوپر مسئله پرت (PERT) که در آن t_j ، زمان معادل تکمیل j امین فعالیت، از نوع متغیر تصادفی می باشد را به صورت زیر فرمولبندی کرده اند:

$$\text{Minimize } u_m - u_0 \quad (15)$$

S.t.

$$P\left(\sum_{i=0}^m u_i t_{ij} \geq t_j\right) \geq \beta_j \quad j=1, \dots, n$$

t_j اندیس های رقمی^۱ شبکه می باشند. β_j نمایش ریسک نسبت داده شده به زمان تخمینی برای تکمیل j امین فعالیت است.