

درک ساده تر مفاهیم تابع و حد

مؤلف: فریبا محمدی تبار

سرشناسه	: محمدی تبار، فریبا، ۱۳۵۳ - گردآورنده
عنوان و پدیدآور	: درک ساده تر مفاهیم تابع و حد، گردآورنده فریبا محمدی تبار.
مشخصات نشر	: تهران: کلک خیال، ۱۳۸۶.
مشخصات ظاهری	: [۶۸] ص: مصور، جدول، نمودار: ۱۶ × ۱۲ س م
شابک	: ۲۰۱۰۰۰ ریال: ۱ - ۷۳۱۲۰۳۰ ۹۷۸ ۹۶۴
وضعیت فهرست نویسی	: فیبا
یادداشت	: کتابنامه: ص. [۶۸].
موضوع	: توابع
موضوع	: حد (ریاضیات).
موضوع	: توابع - مسائل، تمرین ها و غیره (متوسطه).
موضوع	: حد (ریاضیات) - مسائل، تمرین ها و غیره (متوسطه).
رده بندی کنگره	: ۵۱۵ : ۳۴۱ / ۳۲۱ Q۸
رده بندی دیویی	: ۵۱۵ :
شماره کتابخانه ملی	: ۴۹۳۴۴ : ۸۵م

درک ساده تر مفاهیم تابع و حد

ناشر	انتشارات کلک خیال
مؤلف	فریبا محمدی تبار
نوبت چاپ	اول ۱۳۸۷
شمارگان	۵۰۰ جلد
طرح جلد	سبیم مقیم مهر
ناظر فنی	حسین شهناز
چاپ و صحافی	: تادرنک
شابک	: ۲۰۱ ۷۳۱۲۰۳۰ ۹۷۸ ۹۶۴

کلیه حقوق برای ناشر محفوظ است.

هرگونه نسخه برداری از این کتاب بدون کسب اجازه از مؤلف ممنوع و پیکرد قانونی دارد.

تقدیم به همسر آقای حسن شهنواز که
بودن در کنارش برای من همواره با
یادگیری، توسعه فکری، آرامش و مهر
ورزیدن همراه بوده است و در تالیف این
مجموعه یار و یاورم بود، و تقدیم به همه
کسانی که به آینده‌ای بهتر می‌اندیشند.

سال‌ها پیش هنگامی که هنوز یک دانش‌آموز بودم هر بار که معلم درس جدیدی از ریاضیات را تدریس می‌کرد این سوالها ذهن مرا به خود مشغول می‌کرد: "دانستن این مطلب جدا از بازی‌های ذهنی به چه درد می‌خورد؟ و یا چه کاربردی می‌تواند در زندگی روزمره‌ی ما داشته‌باشد؟" و "چه اتفاق یا چه نیازی باعث ورود این مطلب به دنیای ریاضیات شد؟" و هر بار که این سوال‌ها بر زبان می‌آمد به دلیل کمبود وقت پاسخ آن یا سکوت بود و یا به آینده موکول می‌شد. زمان گذشت اما دروس دانشگاهی نیز نه تنها نتوانست این سکوت را بشکند بلکه خود نیز بر عطش دانستن آن افزود. کم‌کم این سوال‌ها به دست فراموشی سپرده می‌شد، که دست سرنوشت بار دیگر مرا به همان کلاس‌های درس برد اما این بار نه به عنوان یک محصل بلکه به عنوان یک معلم. حالا دیگر این من بودم که باید در برابر چنین پرسش‌هایی پاسخگو می‌بودم. دو راه در برابر خود داشتم راه اول که آسان‌تر نیز بود "سکوت" و یا موکول

کردن جواب به آینده بود و راه دوم که مشکل‌تر به نظر می‌رسید یافتن پاسخ‌ها بود و من باید یکی از این دو راه را انتخاب می‌کردم حس کنجکاوی و میل شدید به دانستن پاسخ سوال‌هایی که سالها ذهن مرا به خود مشغول کرده بود راه دوم را برگزید.

گفته، شاعر و هنرمند آلمانی می‌گوید: "تاریخ دانش، خود دانش است." و جرج برنال، دانشمند و مرد اجتماعی انگلیسی می‌گوید: "در دانش، بیش از هر جای دیگری از فعالیت‌های انسانی، باید به بررسی گذشته رو آورد. این بررسی، برای درک زمان و امکان پیروزی بیشتر بر طبیعت در آینده لازم است."

به این ترتیب شروع به مطالعه و تحقیق در این زمینه نمودم و برای این منظور به کتابخانه‌های زیادی رفتم و در سمینارها شرکت کردم اما هرچه بیشتر گشتم به فقر بیشتر در این زمینه پی‌بردم زیرا عده‌ی کسانی که در این زمینه کار کرده بودند انگشت‌شمار بود. کنکور نیز عاملی شده بود تا این کتب و این نویسنده‌ها در انزوای بیشتر بمانند. و اگر در جایی یافت می‌شد برای جوینده‌گانش همچون گنجینه‌ای محفوظ می‌ماند.

لذا در چنین شرایطی تصمیم بر آن گرفتیم تا آنچه را که می‌یابیم در اختیار دیگران نیز قرار دهیم تا آنان نیز همچون من از خواندن این مطالب لذت ببرند.

برای شروع، مبحث "تابع" و "حد" را برگزیدم زیرا بیشترین پرسش‌هایی که در این سال‌ها با آن روبرو بوده‌ام در این زمینه بوده است. در این کتاب به هیچ‌عنوان هدف، طرح و آموزش حل مساله نبوده است زیرا که در این زمینه به اندازه‌ی کافی کتب تالیف شده موجود می‌باشد که علاقه‌مندان می‌توانند در صورت لزوم به آنها رجوع کنند و پاسخ پرسش‌های خود را بیابند.

بنابراین در اینجا جز در مواردی که به نظر رسیده است عنوان کردن یک یا چند مثال به فهم بیشتر مطلب کمک می‌کند از ذکر نمونه سوال اجتناب شده است. همچنین جز در مواردی خاص که احساس کرده‌ام دانش‌آموز ممکن است در آن موارد پرسش‌هایی داشته باشد و به منظور یادآوری و ایجاد ارتباط مطالب کتاب با یکدیگر نکاتی چند را عنوان کرده‌ام.

سعی من در نگارش این کتاب بر آن بوده است که علاوه بر اینکه دانش‌آموز با تاریخچه و کاربردهایی از تابع و حد آشنا

می‌شود، پس از مطالعه‌ی این کتاب بتواند به پاسخ
بررسی‌هایی نظیر سوالات زیر نیز دست یابد:

آیا متغیر همان مجهول است؟ اگر نه این دو چه ارتباطی با
یکدیگر دارند؟

چه چیز باعث شد متغیر وارد دنیای ریاضیات شود؟ و
اصولا فرق متغیر و مجهول در چیست؟

رابطه چیست و ما چه نیازی به بررسی آن داریم؟

تابع چیست و چه ارتباطی با متغیر دارد؟

ارتباط متغیر و رابطه و تابع با نگاشت چگونه است؟ چه
نیازی سبب تقسیم‌بندی آنها از یکدیگر شد؟

ضابطه‌ی تابع یعنی چه؟ آیا منظور از تابع همان ضابطه‌ی
تابع است؟

آیا هر تابعی حتما یک ضابطه دارد؟

تعیین دامنه‌ی یک تابع چه اهمیتی دارد؟

چرا یک تابع را به شکل‌های مختلفی از جمله زوج مرتب،
مودار، ضابطه و... نشان می‌دهند؟

آیا هر تابعی تنها یک یا دو متغیر دارد و یا اینکه توابعی با
بیش از دو متغیر نیز وجود دارد؟

چه سرنوشتی باعث شد مفهوم تابع وارد ریاضیات شود؟

* چه اتفاقاتی باعث شد تا تعریف تابع به شکل امروزی
ارائه شود؟

* اصولاً ما چه نیازی داریم که مفاهیم ریاضی را این چنین
دقیق و با وسواس زیاد تعریف کنیم؟

* آیا حد تابع همان مقدار تابع است؟ اگر نه فرق بین آن دو
در چیست؟

* چه سرنوشتی سبب ورود مفهوم حد در ریاضیات شد؟

* بی‌نهایت چیست و از چه زمانی وارد ریاضیات شد؟

و به این ترتیب بتوانم هم در درک بهتر مطلب و هم در
ایجاد انگیزه‌ی بیشتر در جهت فهم مطالب و لذت بردن از
آنها گام موثری هر چند کوچک بردارم، به امید آنکه این
کتاب برای دانش‌آموزان، دبیران و علاقه‌مندان مثمر ثمر
واقع شود. همچنین از آنجا که هیچ نوشته‌ای خالی از ایراد و
کاستی نیست، از خوانندگان فهیم و صاحب‌نظران تقاضا می‌کنم
اشکالات، غلط‌ها و کاستی‌های کتاب را از طریق ناشر
یادآوری کنند تا برطرف گردد.

صل ۱ - تابع

۱ - سیر تکاملی از مجهول به متغیر

۲ - تابع و نمایش آن

۳ - گشت و گذار در موزه ریاضی

سرگذشت مفهوم تابع

۴ - تابع حقیقی و تابع با متغیر حقیقی

۵ - تابع دو شناسه یا تابع دومتغیره

۶ - خصوصیات تابع

یک به یک و پوششی بودن توابع

۷ - کاربردهای توابع

۸ - چرا به تعریف دقیق مفاهیم ریاضی نیازمندیم؟

۹ - تابع ها و منحنی های عجیب

۱۰ - تکلیف بعد چه می شود؟

صل ۲ - حد

۱ - گذری درموزه حد تابع

۲ - تعریف حد تابع

۳ - حدهای نامتناهی

۴ - حد در بی نهایت

۵ - مفهوم بی نهایت در علوم تجربی

۶ - مفهوم میل کردن و لزوم تعریف همسایگی محذوف

۱۳۳	۲ - ۷ تعبیر هندسی حد
	فصل ۳ دنباله
۱۴۵	۳ - ۱ دنباله
۱۴۹	۳ - ۲ مفهوم حد دنباله
۱۵۷	۳ - ۳ مرک و زندگی در دستان حد
۱۶۳	۳ - ۴ دنیای شکفت آور بی نهایت
۱۶۹	۳ - ۵ بی نهایت

مقدمه

بشر، با نیروی تفکر و تعقل خود همواره توانسته است بر طبیعت پیروز شود و همچنان به حیات خود در این کره‌ی خاکی ادامه دهد. او برای ادامه حیات خود ناگزیر به شناخت طبیعت، برای مهار کردن نیروهای آن بود، عواملی چون سیل، زلزله و زمانی حتی برف و باران باعث وحشت او می‌شد و این وحشت نه از خود این عوامل به تنهایی، بلکه از عدم شناخت و ناآگاهی انسان نشأت می‌گرفت. او در زمین و در اعماق دریا و در کرات و آسمانها در جستجوی ناشناخته‌هاست زیرا می‌خواهد بر همه چیز تسلط داشته باشد، زمانی خسوف و کسوف باعث وحشت او می‌شد زیرا او نمی‌دانست که چرا چنین امری به وقوع می‌پیوندد، شاید همین ترس از ناشناخته‌ها بود که او را به کشفیات بسیاری نائل گردانید، چیزهایی که زمانی به دلیل ناشناخته بودن، موهومی و ترسناک بود پس از شناخته شدن به مواردی عادی و طبیعی و حتی مفید تبدیل شدند. انسان برای تسلط کامل‌تر بر یافته‌های جدیدش سعی داشت حرکت و قوانین کلی آن ناشناخته‌ها را بیابد تا بتواند حرکت بعدی آنها را پیش‌بینی کند و از آن به نفع خود بهره جوید.

پس باید شناخت خود را از طبیعت و از قوانین موجود در آن کامل‌تر می‌کرد، چرا که، چه او این قوانین را بداند و چه نداند، این

قوانین بر جهان حاکمند، و جهان بر اساس آنها در حرکت است، از این رو، و در این راستا، علم ریاضی متولد شد و گسترش یافت زیرا به قول گالیلئو گالیلئ (۱۶۴۲-۱۵۶۲):

[جهان] را نمی‌توان فهمید مگر آنکه زبانش را بیاموزیم و با حروفی که نوشته شده است آشنا شویم و این همان زبان ریاضیات است.

در ابتدا انسان فقط برای نیازهای اجتماعی‌اش به ریاضیات توجه داشت مثلاً برای شمارش گوسفندان و دارایی‌اش برای دادوستد و تقسیم زمین برای کشت و ساخت معابد و قلعه‌ها و جمع‌آوری مالیات و ... نیاز به ریاضی را حس می‌کرد، و این احساس نیاز، پایه و اساس و انگیزه‌ی اصلی، برای ایجاد مفاهیم و دستورهای ابتدایی در ریاضیات بود.

در آن زمان، علم ریاضی بصورت مرموز، همچون اسرار، فقط به اشخاص خاصی که پس از طی مراحل سخت و آزمایش‌های بسیار، موفق به گذراندن این دوره‌ها می‌شدند و نسبت به آنان اطمینان حاصل می‌شد که این اسرار را فاش نخواهد کرد (مثلاً دوره‌های ۵ ساله‌ی سکوت)، این علوم، آموزش داده می‌شد و عوام به دلیل ناآشنایی و ناشناخته بودن، از آن علوم به عنوان کلمات رمز گونه یا اسرار یاد می‌کردند.

ترس از ناشناخته‌ها را در ریاضیات نیز می‌توان دید، زمانی

که فیثاغورثیان با اعداد آشنا شدند، آنها را طبیعی نامیدند و جهان و طبیعت پیرامون خود را با اعداد توضیح می‌دادند، در آن زمان دیدن عددهایی که با قوانین او سازگار نبودند او را واداشت که آن اعداد غیرطبیعی را اعداد موهومی یا گنگ بنامد (مانند عدد $\sqrt{2}$). آنان اعداد مثبت را (راست) و اعداد منفی را (دروغ) و اعداد مختلط را (خیالی) نامیدند.

پس ریاضیات جدا از طبیعت و زندگی طبیعی ما نیست، ریاضیات چیزی جدا از نیازهای ما نیست. در واقع این نیاز بشر است که باعث کشف قوانین ریاضی شد، ریاضیات و قوانین آن در بطن طبیعت وجود دارند و این بشر است که با گسترش فهم و دانش، موفق به کشف و سپس بهره‌برداری از این علوم، در جهت حمایت از خود می‌شود.