



ویرایش دوازدهم

# حساب دیفرانسیل و انتگرال توماس

جلد اول (قسمت اول)

تألیف: جورج ب. توماس - جوئل هاس - موریس د. ویر

شامل:

مباحث تابع - حد و پیوستگی مشتق و کاربرد آن

قابل استفاده برای دانش آموزان مقطع پیش دانشگاهی و دانشجویان سال اول دانشگاهها

مترجمین: احمد مجلسی (عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی مالک اشتر)

محمد تقی خادمی (عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی اصفهان)

سرشناسه: ویر، موريس دى، ۱۹۳۹-م. Weir, Maurice D.

عنوان و نام پديدآور: حساب ديفرانسييل و انتگرال توماس / موريس دى. ویر، جوئل هاس، جورج ب. توماس؛

مترجمين احمد مجلسی، محمد تقی خادمی.

مشخصات نشر: اصفهان: پويش اندیشه، ۱۳۹۰.

مشخصات ظاهري: ۳ ج.: مصور، جدول، نمودار؛ ۲۹×۲۲ س.م.

شابک: ۹ ۷۸-۹۶۴-۵۴۴-۲۲۳-۰ ج. ۱: ۹۷۸-۹۶۴-۵۴۴-۲۲۴-۰ ج. ۲: ۹۷۸-۹۶۴-۵۴۴-۲۲۵-۰ ج. ۳: ۹۷۸-۹۶۴-۵۴۴-۲۲۶-۰

يادداشت: عنوان اصلي: Thomas' calculus, 12nd ed.

يادداشت: کتاب حاضر بر اساس کتاب «حساب ديفرانسييل و انتگرال و هندسه تحليلی» اثر جورج ب. توماس است که در ویراست‌های قبلی اثر اصلي توماس سرشناسه بوده است.

يادداشت: واژه‌نامه.

موضوع: حسابان

موضوع: حساب ديفرانسييل

موضوع: حساب انتگرال

شناسه افزوده: هاس، جوئل

شناسه افزوده: Hass, Joel

شناسه افزوده: مجلسی، احمد، ۱۳۴۰-، مترجم

شناسه افزوده: خادمی، محمد تقی، -، مترجم

شناسه افزوده: توماس، جورج بریتن، ۱۹۱۴-۲۰۰۶ م. حساب ديفرانسييل و انتگرال و هندسه تحليلی

رده بندي کنگره: QA۳۰۳/ت۵ ح۵ ۱۳۹۰الف

رده بندي ديويي: ۵۱۵/۱۵

شماره کتابشناسی ملی: ۲۴۴۵۶۸۸



انتشارات پويش اندیشه

Poyesh.andishe@gmail.com

نام کتاب: حساب ديفرانسييل و انتگرال (جلد اول قسمت اول)

مترجمين: احمد مجلسی - محمد تقی خادمی

ناشر: انتشارات پويش اندیشه

ليتوگرافي: آرمان - چاپ: اصفهان - صحافي: امين

صفحه آرا: پويش نگار (۰۸۵-۰۳۱۱۱-۰۹۱۱)

تيراژ: ۲۰۰۰ جلد

چاپ: اول - تعداد صفحات: ۲۸۸

قطع: رحلی

قيمت: ۱۳۰۰۰ تومان

شابک: ۹ - ۷۸ - ۹۶۴ - ۵۴۴ - ۲۲۳ - ۰

آدرس مراکز بخش اصفهان: خیابان مسجد سيد - خیابان پنج رمضان بالاتراز جهاد دانشگاهی

کوچه ۱۷ پلاک سوم انتشارات پويش اندیشه کدپستی ۶۵۹۵۱ - ۸۱۳۷۸

تلفن: ۰۹۱۳۳۱۱۳۰۸۵

فکس: ۳۳۷۳۵۷۷

پست: ۳۳۶۳۲۱۸

خیابان آمادگاه - کوی فتح آباد - بخش کتاب علم گستر تلفن: ۲۲۱۹۹۷۹

هرگونه تکثیر - نسخه برداری، کپی برداری و فروش کپی‌های این کتاب با استناد به مواد ۲۳ و ۲۹ قانون حمایت از مؤلفان خلاف قانون، اخلاق و شرع بوده و مشمول قوانین مجازات اسلامی خواهد بود.

در این ویرایش تغییرات قابل توجهی در حساب دیفرانسیل توماس ایجاد شده است تا نیازهای امروزه اساتید و دانشجویان را برآورده کند. نتیجه این عمل، کتابی با مثال‌های بیشتر، تمرین‌های با سطح متوسط بیشتر و شکل‌های بیشتر و از نظر مفهومی روان‌تر و با دقت و روشنی افزون‌تر است. مشابه ویرایش‌های قبلی، این ویرایش جدید نیز مقدمه جدیدی برای حسابان با تأکید روی درک مفاهیم ارائه می‌کند. هر چند که نکات اصلی برای یک درس رسمی حفظ شده‌اند. این پیشرفت رابطه نزدیکی با به کارگیری ویرایش پیشرفته‌ی *My Mathlab* (که بیشتر آن را بحث کردیم) دارد که از انعطاف‌پذیری بیشتری برای دانشجویان و اساتید برخوردار است.

بسیاری از دانشجویان در دبیرستان با واژه‌ها و روش‌های محاسباتی حسابان آشنا شده‌اند با وجود این آشنایی دانشجویان با روش‌های جبر و مثلثات مانع موفقیت در حساب دیفرانسیل و انتگرال در دانشگاه می‌شود. در این کتاب می‌خواهیم تعادلی بین تجربیات پیشین دانشجویان با حسابان و مهارت‌های جبری پیشرفته مورد نیاز، برقرار کنیم بدون آنکه روحیه آن‌ها را ضعیف کنیم یا باعث از دست رفتن اعتماد به نفس آن‌ها شویم. به اندازه کافی مطالب گذشته یادآوری شده و تمرین‌ها گام به گام حل شده‌اند تا برای همه دانشجویان با هر سطح معلومات مفید باشد.

دانشجویان را تشویق می‌کنیم که با فکر کردن در مورد فرمول‌هایی که به خاطر سپرده‌اند مفاهیم آموخته شده را تعمیم دهند. امیدواریم دانشجویان بعد از آنکه این درس را گذرانند، در حل مسایل و استدلال تسلط کافی پیدا کرده باشند. تسلط بر یک موضوع زیبا با کاربردهای عملی فراوان در زندگی، لذت‌بخش است ولی لذت واقعی، توانایی تفکر و تعمیمی است که به آن دست می‌یابید. در این کتاب می‌خواهیم پشتیبانی‌های لازم را برای هر دو موضوع فراهم کنیم.

## تغییرات ویرایش دوازدهم

**محتوی:** برای آماده کردن این ویرایش ساختار اصلی فهرست عناوین از ویرایش یازدهم را حفظ کردیم. البته به درخواست خوانندگان و صاحب‌نظران، مقدمه‌ای از معادلات پارامتری را تا ارائه مبحث مختصات قطبی به تأخیر انداختیم و قواعد هویپیتال را نیز بعد از

مطالعه توابع متعالی بیان کردیم. در اغلب فصل‌ها بازنگری کرده‌ایم که جزییات آن به صورت زیر است.

**توابع:** این فصل را خلاصه‌تر کردیم تا روی مفهوم تابع تمرکز بیشتری پیدا کنیم. مقدمات اولیه که شامل اعداد حقیقی بازه‌ها، نمودها و خطوط مستقیم، فاصله‌ها، دایره‌ها و سهمی‌ها می‌باشد در پیوست‌های ۱ تا ۳ بیان شده‌اند.

**حد:** برای روان شدن این فصل، مفاهیم حد در بینهایت و رابطه آن با مجانب‌های نمودار تابع را به طور یک جا در بخش آخر فصل ۲ بیان کردیم.

**مشتق‌گیری:** به دلیل آنکه آهنگ تغییر و مماس بر منحنی انگیزه‌های مطالعه مفهوم حد هستند مفهوم مشتق را در یک فصل جداگانه بیان کرده‌ایم. در مثال‌های مربوط به آهنگ‌های وابسته بازنگری کرده و تعداد آن‌ها را نیز افزایش دادیم. مثال‌ها و تمرینات جدیدی برای رسم نمودار توابع گویا اضافه کردیم.

**ضدمشتق و انتگرال‌گیری:** به عنوان آخرین مبحث از فصل کاربردهای مشتق، سازمان‌دهی ویرایش یازدهم در مورد ضدمشتق را حفظ کردیم. به عنوان جواب ساده‌ترین نوع معادله دیفرانسیل مرتبه اول بر روی «بازیابی تابع از مشتقش» تمرکز کرده‌ایم. انتگرال‌ها، به عنوان «حد مجموع‌هایی ریمانی» و انگیزه اولیه‌ی پیدا کردن مساحت نواحی با مرز منحنی هستند. این مبحث جدید یکی از مطالب فصل ۵ را تشکیل می‌دهد. بعد از گسترش دقیق مفهوم انتگرال، روی محاسبه آن و ارتباط آن با ضدمشتق که در قضیه اساسی حسابان گرفته شده است، تمرکز می‌کنیم پس از آن کاربردهای گوناگون هندسی مثل مساحت، حجم، طول مسیر و مرکز‌گون را بیان می‌کنیم که همه به صورت حد مجموع ریمان تعریف می‌شوند که به انتگرال معین منجر می‌شود و می‌توان با پیدا کردن ضدمشتق تابع انتگرال‌دهنده، آن‌ها را محاسبه کرد. بعد از تعریف و بیان توابع متعالی و ویژگی‌های آن‌ها، معادلات دیفرانسیل مرتبه اول پیچیده‌تری را حل می‌کنیم.

**معادلات دیفرانسیل:** بعضی از دانشگاه‌ها ترجیح می‌دهند که این درس را به صورت جدای از حساب دیفرانسیل و انتگرال بیان کنند. اگر چه در فصل مربوط به توابع متعالی، و به عنوان کاربردی از رشد و زوال توابع نمایی، حل معادلات دیفرانسیل جدا شدنی را بیان کرده‌ایم، ولی

این موضوع را در دو فصل تقسیم کردیم. (که برای پیوستگی مباحث حساب دیفرانسیل و انتگرال به یکدیگر می‌توان آن را حذف کرد). در فصل ۹ مقدمه‌ای از معادلات دیفرانسیل را بیان می‌کنیم که شامل یک بخش جدید از دستگاه‌ها و صفحات فاز با کاربردهایی از آن در الگوی رقابت - شکارچی و الگوی شکار - شکارچی است. مقدمه‌ای از معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم در فصل ۱۷ ارائه شده است.<sup>۱</sup>

**سری‌ها:** برای مباحث دنباله و سری، ساختار و سازمان‌دهی ویرایش یازدهم حفظ شده است. چندین شکل و تمرین جدید به بخش‌های گوناگون آن اضافه شده‌اند و در بعضی از اثبات‌ها در رابطه با همگرایی سری‌های توانی و فهم آسان‌تر آن برای دانشجویان تجدید نظر کرده‌ایم. پیرو درخواستی از یکی از دانشکده‌ها مبنی بر هر تغییری که باعث آسان‌تر شدن فهم مطالب این فصل شود، مورد استقبال قرار می‌گیرد، باعث شد که در این فصل بازنگری کنیم.

**معادلات پارامتری:** کار بران زیادی درخواست کرده‌اند که این مبحث را به فصل ۱۱ منتقل کنیم که در آن مقاطع مخروطی و مختصات قطبی بیان شده‌اند. با درک این موضوع که بسیاری از دانشکده‌ها برای آغاز ریاضی ۳، این مباحث را انتخاب می‌کنند تا بتوانند آمادگی لازم برای مباحث بردارها و حساب دیفرانسیل توابع چند متغیره را کسب کنند، این عمل را انجام دادیم.

**توابع برداری:** به موازات مباحث این فصل، روی ایده‌های مفهومی تأکید بیشتری کردیم تا مباحث بعدی مثل مشتقات جزئی، بردار گرادیان و انتگرال‌های خط را بهتر درک کنید. مباحث مربوط به قاب فرنه و سه قانون حرکت اقماری کپلر را در یک بخش متمرکز کردیم.

**حساب دیفرانسیل و انتگرال چند متغیره:** در این فصل‌ها هنر بیشتری خرج کردیم و تمرین‌ها، مثال‌ها و شکل‌های جدیدی به آن اضافه کردیم. مطالب مربوط به انتگرال‌های دوگانه را تجدید سازمان‌دهی کردیم و کاربردهای انتگرال‌های دوگانه و سه گانه در مورد جرم و گشتاور را با هم ترکیب کرده و در یک بخش جداگانه بیان کردیم که هر دو حالت دو بعدی و سه بعدی را می‌پوشاند. این تجدید سازمان‌دهی امکان می‌دهد که مفاهیم اصلی ریاضیات، همراه با ویژگی‌های آن و جنبه‌های محاسباتی آن روان‌تر جریان یابد. مشابه ویرایش یازدهم، ایجاد رابطه بین مفاهیم چند متغیره و یک متغیره و

۱- چون در ایران درس معادلات جداگانه ارائه می‌شود. این فصل ترجمه نشده است.

مقایسه آن با مطالبی که پیشتر مطالعه کردیم را در این ویرایش نیز ادامه دادیم.

**میدان‌های برداری:** با گنجاندن مثال‌ها، شکل‌ها و تمرین‌های بیشتر، تلاش زیادی کردیم تا بحث حساب انتگرال توابع برداری دقیق‌تر و روشن‌تر بیان شود. قضایا و نتایج مهم با وضوح بیشتر و کامل‌تر بیان شده‌اند. اکنون مساحت یک رویه در یک بخش جداگانه بیان شده است و رویه‌ها به صورت صریح و ضمنی به عنوان حالات خاصی از نمایش عمومی معادلات پارامتری بیان شده‌اند. پس از آن انتگرال رویه و کاربردهای آن در بخش جداگانه آورده شده است. قضیه استوکس و قضیه واگرایی گاوس هنوز هم به عنوان تعمیم سه بعدی قضیه گرین بیان شده است.

**تمرین‌ها و مثال‌ها:** می‌دانیم که در آموزش حساب دیفرانسیل و انتگرال، مثال‌ها و تمرین‌ها مؤلفه‌های مهمی هستند. به دلیل این اهمیت، در هر بخش از ویرایش‌های جدید این کتاب، آن‌ها را روز آمد کرده و تعدادشان را نیز افزایش داده‌ایم. بیش از ۷۰۰ مسئله جدید در این ویرایش به آن اضافه شده است. مشابه ویرایش‌های قبلی، سازمان‌دهی و دسته‌بندی مسایل را از مسایل محاسباتی تا کاربردی و نظری برنامه‌ریزی کردیم. تمریناتی که مستلزم استفاده از نرم افزارهای رایانه‌ای (مثل Maple یا Mathematica) هستند در پایان تمرین‌های هر بخش آورده شده‌اند و با عنوان **گوش‌های رایانه‌ای** مشخص شده‌اند. اغلب تمرین‌های کاربردی تحت عنوانی هستند که نوع آن کاربرد در مسئله مشخص شده است.

در بسیاری از بخش‌ها مثال‌های جدیدی گنجانده شده است تا مفهوم مورد بحث عمیق‌تر و روشن‌تر بیان شود و به دانشجویان درک نتایج ریاضی یا کاربردهای آن در علوم و مهندسی کمک کند. هم زمان، مثال‌هایی که مفاهیم بیان شده در آن تکراری هستند را حذف کردیم.

**هنر:** به دلیل اهمیت آموزش حساب دیفرانسیل و انتگرال، اصلاح شکل‌های موجود در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال توماس را ادامه دادیم و تعداد زیادی شکل جدید را نیز ایجاد کردیم.

**سختی:** میزان سختی آن با ویرایش‌های قبلی سازگاری دارد. هنوز بین مباحث رسمی و غیر رسمی تفاوت گذاشته‌ایم و به این تفاوت‌ها نیز اشاره کرده‌ایم. کوشش کرده‌ایم که آموزش بیشتر شهودی و عملی باشد و کمتر جنبه رسمی داشته باشد تا درک مفاهیم دقیق ریاضی

پروردگار یکتا را سپاس و ستایش می‌کنیم که بار دیگر توفیق خدمت بیشتری به ما عنایت کرد تا آخرین ویرایش کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال توماس را به فارسی برگردانده و به همکاران و دانشجویان عزیز تقدیم کنیم. بدون شک هر کسی که با القبای ریاضی آشنا باشد با نام جورج - ب - توماس، استاد ریاضی مؤسسه تکنولوژی ماساچوست *M.I.T* آشناست و آثار او را می‌شناسد که فاخرترین اثرش اکنون پیش روی شما قرار دارد.

این کتاب هم‌اکنون به عنوان کتاب اصلی دروس ریاضیات عمومی برای رشته‌های فنی و مهندسی - ریاضی - فیزیک و شیمی انتخاب و تدریس می‌شود. یکی از ویژگی‌های برجسته این کتاب که تمایز آن با بقیه کتاب‌های هم‌عنوانش نیز محسوب می‌شود تلفیق کاربرد با مفاهیم ریاضی است تا دانشجو پس از گذراندن این دروس ریاضی بتواند مسایل کاربردی رشته تخصصی‌اش را حل کند. کوشیده‌ایم از واژه‌های مرکز نشر برای واژه‌های کتاب استفاده کنیم.

بدون شک افراد زیادی در تهیه و تولید این اثر سهیم هستند. در همین‌جا بایستی از مدیریت انتشارات پویش اندیشه جناب آقای **میرزا شیرانی تشکر و قدردانی کنیم.**

از سرکار خانم‌ها بتول حیدری و خدیجه حیدری برای صبر و حوصله‌شان در تایپ، صفحه‌آرایی و اسکن تصاویر تشکر می‌کنیم. بیش از ۵ بار غلط‌گیری انجام شده است ولی شاید باز هم اشتباه وجود داشته باشد، خوشحال می‌شویم که این اشتباهات را به پست الکترونیک **Poyesh.andishe@gmail.com** یا **Poyesh\_andishe43@yahoo.com** بفرستید.

در پایان خواهم‌ندید که دانشجویان عزیز به هیچ وجه این اجازه را به دیگران ندهند که از روی کتاب نسخه‌برداری کرده و زحمات افراد زیادی که در بالا به نامشان اشاره شد توسط دزدان علم به هدر رود. آرزوی موفقیت و شادکامی برای همه همکاران و دانشجویان عزیز را داریم و امیدوارم با این اثر روح تازه‌ای به دروس ریاضی عمومی دانشگاهی دمیده شود.

خدایا چنان کن سرانجام کار

تو خشنود باشی و ما رستگار

محمد تقی خادمی - احمد مجلسی

برای دانشجویان آسان‌تر شود. مفاهیم عمیق‌تر را به یک درس پیشرفته‌تر واگذار کرده‌ایم. سازمان‌دهی و تفاوت بین مباحث رسمی و غیر رسمی به معلمین این آزادی را می‌دهد که مقدار و عمق مباحث گوناگون را انتخاب کنند. مثلاً اگر چه قضیه مقدار میانی یا قضیه مقدار فرینه برای توابع پیوسته روی بازه  $a \leq x \leq b$  را ثابت نمی‌کنیم ولی این قضایا را به دقت بیان می‌کنیم و آن‌ها را در مثال‌های مشهوری شرح می‌دهیم و از آن‌ها برای اثبات نتایج مهم استفاده می‌کنیم. به علاوه برای معلمینی که مایلند مفاهیم را عمیق‌تر آموزش دهند، در پیوست ۶، پیرامون درستی این قضیه‌ها و اصل موضوع کمال در اعداد حقیقی بحث کرده‌ایم.

**نوشتن تمرین‌ها:** در سراسر کتاب از دانشجویان خواسته شده است که با نوشتن تمرین‌ها، مفاهیم و کاربردهای حسابان را درک و کشف کنند. به علاوه پایان هر فصل شامل فهرستی از پرسش‌های هدفمند برای دانشجویانی است که می‌خواهند درس را مرور و به طور خلاصه آن را بیاموزند. در بسیاری از این تمرین‌ها خواسته شده است که جواب تمرین را بنویسید.

**برنامه‌ها و پرسش‌های مروری پایان فصل:** علاوه بر مسایلی که در پایان هر بخشی وجود دارد، در پایان هر فصل، پرسش‌هایی برای مرور فصل و تمرین‌های مهارتی که همه مباحث فصل را می‌پوشاند و یک سری تمرین‌های پیشرفته و تکمیلی که مسایلی مبارز طلب و یا مسایل تجسمی هستند، آورده شده است. در اغلب فصل‌ها، برنامه‌های کاربرد فن‌آوری توصیف شده است که می‌تواند توسط گروهی از دانشجویان یا در یک بازه زمانی طولانی‌تر حل شود. در این برنامه‌ها حتماً باید از نرم‌افزارهای مپل یا متتیکا استفاده شود.

**فن‌آوری:** مباحثی که در این کتاب بیان شده‌اند، مطابق با سلیقه مدرس می‌تواند با فن‌آوری همراه شود. هر بخش شامل تمرین‌هایی است که حل آن‌ها مستلزم استفاده از فن‌آوری است. اگر ماشین حساب یا رایانه برای حل آن‌ها مناسب باشد آن‌ها را با نماد  $[T]$  مشخص کرده‌ایم. اگر یک دستگاه جبری رایانه‌ای CAS (مثل مپل یا متتیکا) برای حل آن‌ها لازم باشد با برجسب کاوش‌های رایانه‌ای مشخص شده‌اند.

# فهرست مطالب

|     |                                    |
|-----|------------------------------------|
| ۱۷۱ | فصل ۴: کاربردهای مشتق              |
| ۱۷۱ | ۱.۴ مقادیر فرینه توابع             |
| ۱۷۸ | ۲.۴ قضیه مقدار میانگین             |
| ۱۸۵ | ۳.۴ توابع یکنوا و آزمون مشتق اول   |
| ۱۸۹ | ۴.۴ گودی و رسم منحنی               |
| ۱۹۸ | ۵.۴ کاربرد بهینه‌سازی              |
| ۲۱۱ | ۶.۴ روش نیوتن                      |
| ۲۱۶ | ۷.۴ ضد مشتق‌ها                     |
| ۲۲۴ | پرسش‌هایی هدفمند برای بازخوانی درس |
| ۲۲۴ | تمرین‌های مهارتی                   |
| ۲۲۸ | تمرین‌های پیشرفته و تکمیلی         |

|     |                                   |
|-----|-----------------------------------|
| ۲۳۱ | پیوست‌ها                          |
| ۲۳۱ | پیوست ۱: اعداد حقیقی و محور حقیقی |
| ۲۳۵ | پیوست ۲: استقرای ریاضی            |
| ۲۳۷ | پیوست ۳: خطوط، دایره‌ها و سهمی‌ها |
| ۲۴۶ | پیوست ۴: اثبات قضایای حدی         |
| ۲۴۸ | پیوست ۶: نظریه اعداد حقیقی        |
| ۲۵۱ | پیوست ۷: اعداد مختلط              |
| ۲۵۹ | جواب تمرین‌های شماره فرد          |
| ۲۸۲ | فهرست راهنما                      |

|    |                                             |
|----|---------------------------------------------|
| I  | پیشگفتار                                    |
| IV | فهرست عناوین کتاب                           |
| ۱  | فصل ۱: توابع                                |
| ۱  | ۱.۱ توابع و نمودار آن‌ها                    |
| ۱۲ | ۲.۱ ترکیب توابع: انتقال و تنظیم نمودارها    |
| ۱۹ | ۳.۱ توابع مثلثاتی                           |
| ۲۷ | ۴.۱ رسم نمودار با ماشین حساب‌ها و رایانه‌ها |
| ۳۰ | پرسش‌هایی هدفمند برای بازخوانی درس          |
| ۳۱ | تمرین‌های مهارتی                            |
| ۳۳ | تمرین‌های پیشرفته و تکمیلی                  |

|    |                                       |
|----|---------------------------------------|
| ۳۵ | فصل ۲: حدها و پیوستگی                 |
| ۳۵ | ۱.۲ آهنگ‌های تغییر و مماس بر منحنی‌ها |
| ۴۱ | ۲.۲ حد تابع و قوانین حدی              |
| ۵۱ | ۳.۲ تعریف دقیق حد                     |
| ۶۰ | ۴.۲ حدهای یک‌طرفه                     |
| ۶۷ | ۵.۲ پیوستگی                           |
| ۷۶ | ۶.۲ حدهای بینهایت و مجانب‌های منحنی   |
| ۸۹ | پرسش‌هایی هدفمند برای بازخوانی درس    |
| ۸۹ | تمرین‌های مهارتی                      |
| ۹۱ | تمرین‌های پیشرفته و تکمیلی            |

|     |                                    |
|-----|------------------------------------|
| ۹۷  | فصل ۳: مشتق‌گیری                   |
| ۹۷  | ۱.۳ مماس‌ها و مشتق‌ها در یک نقطه   |
| ۱۰۱ | ۲.۳ مشتق به صورت یک تابع           |
| ۱۰۹ | ۳.۳ قوانین مشتق‌گیری               |
| ۱۱۶ | ۴.۳ مشتق به عنوان آهنگ تغییر       |
| ۱۲۶ | ۵.۳ مشتق توابع مثلثاتی             |
| ۱۳۱ | ۶.۳ قاعده زنجیری                   |
| ۱۳۸ | ۷.۳ مشتق‌گیری ضمنی                 |
| ۱۴۳ | ۸.۳ آهنگ‌های وابسته                |
| ۱۵۱ | ۹.۳ دیفرانسیل‌ها و خطی‌سازی        |
| ۱۶۰ | پرسش‌هایی هدفمند برای بازخوانی درس |
| ۱۶۱ | تمرین‌های مهارتی                   |
| ۱۶۶ | تمرین‌های پیشرفته و تکمیلی         |