



ویرایش دوازدهم

حساب دیفرانسیل و انتگرال توماس

جلد دوم

تألیف: جورج ب. توماس - جوئل هاس - موریس د. ویر

شامل: مباحث منحنی و توابع پارامتری - انحناء تاب - صفحه و هندسه تحلیلی در فضا

صفحه - توابع چند متغیره - حد و پیوستگی و مشتق پذیری آنها - انتگرال دو گانه

سه گانه - انتگرال خط - انتگرال سطح و انتگرال روی مسیر و کاربردهای آن

قضایای گرین - استوکس - دیورژانس.

مترجمین: احمد مجلسی (عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی مالک اشتر)

محمد تقی خادمی (عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی اصفهان)

نویان و نام پدیدآور: حساب دیفرانسیل و انتگرال / موریس دی. ویر، جوئل هاس، جورج ب. توماس؛

ترجمین احمد مجلسی، محمد تقی خادمی.

شخصیات نشر: اصفهان: پویش اندیشه، ۱۳۹۰.

شخصیات ظاهری: ج۳: مصور، جدول، نمودار: ۲۹×۲۲ س.م.

شابک: ج. ۱: 978-964-544-223-9؛ ج. ۲: 978-964-544-224-6؛ ج. ۳: 978-964-544-225-3

ادداشت: عنوان اصلی: Thomas' calculus, 12nd ed.

ادداشت: کتاب حاضر بر اساس کتاب «حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی» اثر جورج ب. توماس است که در ویراست‌های قبلی اثر اصلی توماس سرشناس رده است.

ادداشت: واژه‌نامه.

وضوع: حسابان

وضوع: حساب دیفرانسیل

وضوع: حساب انتگرال

نمونه افزوده: هاس، جوئل

نمونه افزوده: Hass, Joel

نمونه افزوده: مجلسی، احمد، ۱۳۴۰ -، مترجم

نمونه افزوده: خادمی، محمد تقی، -، مترجم

نمونه افزوده: توماس، جورج بریتن، ۱۹۱۴ - ۲۰۰۶ م. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی

ده بندی کنگره: QA۳۰۳/ت۹ح۵ ۱۳۹۰ الف

ده بندی دیویی: ۵۱۵/۱۵

ماره کتابشناسی ملی: ۲۴۴۵۶۸۸



انتشارات پویش اندیشه

Poyesh.andishe@gmail.com

نام کتاب: حساب دیفرانسیل و انتگرال (جلد دوم)

مترجمین: احمد مجلسی - محمد تقی خادمی

ناشر: انتشارات پویش اندیشه

لیتوگرافی: آرمان - چاپ: اصفهان - صحافی: امین

صفحه آرا: پویش نگار (۰۹۱۳۳۱۱۳۰۸۵)

تیراژ: ۲۰۰۰ جلد

چاپ: اول - تعداد صفحات: ۳۸۸

قطع: رحلی

قیمت: ۱۵۰۰۰ تومان

شابک: ۳ - ۲۲۵ - ۵۴۴ - ۹۶۴ - ۹۷۸

آدرس مراکز پخش اصفهان: خیابان مسجد سید - خیابان پنج رمضان بالاتراز جهاد دانشگاهی

کوچه ۱۷ پلاک سوم انتشارات پویش اندیشه کدپستی ۶۵۹۵۱ - ۸۱۳۷۸

تلفن: ۳۳۶۳۲۱۸ : ۳۳۷۳۵۷۷ : ۰۹۱۳۳۱۱۳۰۸۵ : ۲۲۱۹۹۷۹

خیابان آمادگاه - کوی فتح آباد - پخش کتاب علم گستر تلفن: ۲۲۱۹۹۷۹

هرگونه تکثیر - نسخه برداری، کپی برداری و فروش کپی‌های این کتاب با استناد به مواد ۲۳ و ۲۹ قانون

حمایت از مؤلفان خلاف قانون، اخلاق و شرع بوده و مشمول قوانین مجازات اسلامی خواهد بود.

رایج نمایی، حل معادلات دیفرانسیل جدا شدنی را بیان کرده‌ایم، ولی
ن موضوع را در دو فصل تقسیم کردیم. (که برای پیوستگی مباحث
سبب دیفرانسیل و انتگرال به یکدیگر می‌توان آن را حذف کرد). در
فصل ۹ مقدمه‌ای از معادلات دیفرانسیل را بیان می‌کنیم که شامل یک
فصل جدید از دستگاه‌ها و صفحات فاز با کاربردهایی از آن در الگوی
بیت - شکارچی و الگوی شکار - شکارچی است. مقدمه‌ای از
معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم در فصل ۱۷ ارائه شده است.^۱

روی‌ها: برای مباحث دنباله و سری، ساختار و سازمان‌دهی ویرایش
زدهم حفظ شده است. چندین شکل و تمرین جدید به بخش‌های
وناگون آن اضافه شده‌اند و در بعضی از اثبات‌ها در رابطه با همگرایی
ری‌های توانی و فهم آسان‌تر آن برای دانشجویان تجدید نظر کرده‌ایم.
رو درخواستی از یکی از دانشکده‌ها منجر به تغییراتی که باعث
سازگارتر شدن فهم مطالب این فصل شود، مورد استقبال قرار می‌گیرد،
علاوه شد که در این فصل بازنگری کنیم.

معادلات پارامتری: کار بران زیادی درخواست کرده‌اند که این
بحث را به فصل ۱۱ منتقل کنیم که در آن مقاطع مخروطی و
فصلیات قطبی بیان شده‌اند. با درک این موضوع که بسیاری از
دانشکده‌ها برای آغاز ریاضی ۳، این مباحث را انتخاب می‌کنند
و مانند آمادگی لازم برای مباحث بردارها و حساب دیفرانسیل توابع
متغیره را کسب کنند، این عمل را انجام دادیم.

ایع برداری: به موازات مباحث این فصل، روی ایده‌های مفهومی
کید بیشتری کردیم تا مباحث بعدی مثل مشتقات جزیی، بردار
رادیان و انتگرال‌های خط را بهتر درک کنید. مباحث مربوط به قاب
نه و سه قانون حرکت اقماری کپلر را در یک بخش متمرکز
کردیم.

سبب دیفرانسیل و انتگرال چند متغیره: در این فصل‌ها هنر بیشتری
برج کردیم و تمرین‌ها، مثال‌ها و شکل‌های جدیدی به آن اضافه
کردیم. مطالب مربوط به انتگرال‌های دو گانه را تجدید سازمان دهی
کردیم و کاربردهای انتگرال‌های دو گانه و سه گانه در مورد جرم و
شتاور را با هم ترکیب کرده و در یک بخش جداگانه بیان کردیم
که هر دو حالت دو بعدی و سه بعدی را می‌پوشاند. این تجدید
سازمان‌دهی امکان می‌دهد که مفاهیم اصلی ریاضیات، همراه با

چون در ایران درس معادلات جداگانه ارائه می‌شود. این فصل ترجمه
شده است.

ویرایش یازدهم، ایجاد رابطه بین مفاهیم چند متغیره و یک متغیره
مقایسه آن با مطالبی که پیشتر مطالعه کردیم را در این ویرایش
ادامه دادیم.

میدان‌های برداری: با گنجاندن مثال‌ها، شکل‌ها و تمرین‌های پیش
تلاش زیادی کردیم تا بحث حساب انتگرال توابع برداری دقیق‌تر
روشن‌تر بیان شود. قضایا و نتایج مهم با وضوح بیشتر و کامل‌تر بیان
شده‌اند. اکنون مساحت یک رویه در یک بخش جداگانه بیان
است و رویه‌ها به صورت صریح و ضمنی به عنوان حالات خاصی
نمایش عمومی معادلات پارامتری بیان شده‌اند. پس از آن انتگرال
و کاربردهای آن در بخش جداگانه آورده شده است. قضیه استوکس
قضیه واگرایی گاوس هنوز هم به عنوان تعمیم سه بعدی قضیه گر
بیان شده است.

تمرین‌ها و مثال‌ها: می‌دانیم که در آموزش حساب دیفرانسیل
انتگرال، مثال‌ها و تمرین‌ها مؤلفه‌های مهمی هستند. به دلیل
اهمیت، در هر بخش از ویرایش‌های جدید این کتاب، آن‌ها را روز
کرده و تعدادشان را نیز افزایش داده‌ایم. بیش از ۷۰۰ مسئله جدید
این ویرایش به آن اضافه شده است. مشابه ویرایش‌های قبلی
سازمان‌دهی و دسته‌بندی مسایل را از مسایل محاسباتی تا کاربردها،
نظری برنامه‌ریزی کردیم. تمریناتی که مستلزم استفاده از نرم
افزارهای رایانه‌ای (مثل Maple یا Mathematica) هستند
پایان تمرین‌های هر بخش آورده شده‌اند و با عنوان **کاوش‌ها**
رایانه‌ای مشخص شده‌اند. اغلب تمرین‌های کاربردی تحت عنوان
هستند که نوع آن کاربرد در مسئله مشخص شده است.

در بسیاری از بخش‌ها مثال‌های جدیدی گنجانده شده است
مفهوم مورد بحث عمیق‌تر و روشن‌تر بیان شود و به دانشجویان
درک نتایج ریاضی یا کاربردهای آن در علوم و مهندسی کمک کند
هم زمان، مثال‌هایی که مفاهیم بیان شده در آن تکراری هستند
حذف کردیم.

هنر: به دلیل اهمیت آموزش حساب دیفرانسیل و انتگرال، اصول
شکل‌های موجود در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال توماس
ادامه دادیم و تعداد زیادی شکل جدید را نیز ایجاد کردیم.

سختی: میزان سختی آن با ویرایش‌های قبلی سازگاری دارد. هنوز به
مباحث رسمی و غیر رسمی تفاوت گذاشته‌ایم و به این تفاوت‌ها نیز

این ویرایش تغییرات قابل توجهی در حساب دیفرانسیل توماس
یاد شده است تا نیازهای امروزه اساتید و دانشجویان را برآورده
د. نتیجه این عمل، کتابی با مثال‌های بیشتر، تمرین‌های با سطح
سطر بیشتر و شکل‌های بیشتر و از نظر مفهومی روان‌تر و با دقت و
شکی افزون‌تر است. مشابه ویرایش‌های قبلی، این ویرایش جدید نیز
مقدمه جدیدی برای حسابان با تأکید روی درک مفاهیم ارائه می‌کند.
چند نکته اصلی برای یک درس رسمی حفظ شده‌اند. این
سرفت رابطه نزدیکی با به کارگیری ویرایش پیشرفته‌ی
My Mathlab (که بیشتر آن را به‌کار می‌بردیم) دارد که از
طاف‌پذیری بیشتری برای دانشجویان و اساتید برخوردار است.

بسیاری از دانشجویان در دبیرستان با واحدها و روش‌های
حساباتی حسابان آشنا شده‌اند با وجود این آشنایی دانشجویان با
روش‌های جبر و مثلثات مانع موفقیت در حساب دیفرانسیل و انتگرال
دانشگاه می‌شود. در این کتاب می‌خواهیم تعادلی بین تغییرات
شده دانشجویان با حسابان و مهارت‌های جبری پیشرفته مورد نیاز
قرار کنیم بدون آنکه روحیه آن‌ها را ضعیف کنیم یا باعث از دست
رفتن اعتماد به نفس آن‌ها شویم. به اندازه کافی مطالب گذشته یادآوری
شده و تمرین‌ها گام به گام حل شده‌اند تا برای همه دانشجویان با هر
سطح معلومات مفید باشد.

دانشجویان را تشویق می‌کنیم که با فکر کردن در مورد
مسئله‌هایی که به خاطر سپرده‌اند مفاهیم آموخته شده را تعمیم دهند.
بدون این دانشجویان بعد از آنکه این درس را گذرانند، در حل
مسائل و استدلال تسلط کافی پیدا کرده باشند. تسلط بر یک موضوع
بسیار با کاربردهای عملی فراوان در زندگی، لذت‌بخش است ولی لذت
فنی، توانایی تفکر و تعمیمی است که به آن دست می‌یابید. در این
کتاب می‌خواهیم پشتیبانی‌های لازم را برای هر دو موضوع فراهم
کنیم.

تغییرات ویرایش دوازدهم

تغییرات: برای آماده کردن این ویرایش ساختار اصلی فهرست عناوین
ویرایش دوازدهم را حفظ کردیم. البته به درخواست خوانندگان و
محبان‌نظران، مقدمه‌ای از معادلات پارامتری را تا ارائه مبحث

مختصات قطبی به تأخیر انداختیم و قواعد هوپیتال را نیز بعد
مطالعه توابع متعالی بیان کردیم. در اغلب فصل‌ها بازنگری کرده‌ایم
جزئیات آن به صورت زیر است.

توابع: این فصل را خلاصه‌تر کردیم تا روی مفهوم تابع تمرکز بیشتر
پیدا کنیم. مقدمات اولیه که شامل اعداد حقیقی بازه‌ها، نمودار
خطوط مستقیم، فاصله‌ها، دایره‌ها و سهمی‌ها می‌باشد در پیوسته
۱ تا ۳ بیان شده‌اند.

حد: برای روان شدن این فصل، مفاهیم حد در بینهایت و رابطه آن
مجانبات‌های نمودار تابع را به طور یک جا در بخش آخر فصل ۲ بیان
کردیم.

مشتق‌گیری: به دلیل آنکه آهنگ تغییر و مماس بر منحنی انگیزه‌ها
مطالعه مفهوم حد هستند مفهوم مشتق را در یک فصل جداگانه بیان
کرده‌ایم. در مثال‌های مربوط به آهنگ‌های وابسته بازنگری کرده
تعداد آن‌ها را نیز افزایش دادیم. مثال‌ها و تمرینات جدیدی برای رس
نمودار توابع گویا اضافه کردیم.

ضدمشتق و انتگرال‌گیری: به عنوان آخرین مبحث از فصل
کاربردهای مشتق، سازمان‌دهی ویرایش یازدهم در مورد ضدمشتق
حفظ کردیم. به عنوان جواب ساده‌ترین نوع معادله دیفرانسیل مرتبه
اول، روی «بازیابی تابع از مشتقش» تمرکز کرده‌ایم. انتگرال‌ها،
عنوان «حجم مجموعه‌هایی ریمانی» و انگیزه اولیه‌ی پیدا کردن مساحت
نواحی با مرز منحنی هستند. این مبحث جدید یکی از مطالب فصل
را تشکیل می‌دهد. بعد از گذراندن این بخش دقیق مفهوم انتگرال، روی محاسبه
آن و ارتباط آن با ضدمشتقی که در قضیه اساسی حسابان گرفته شده
است، تمرکز می‌کنیم. پس از آن کاربردهای گوناگون هندسی مثل
مساحت، حجم، طول مسیر و مرکز‌گرم را بیان می‌کنیم که همه
صورت حد مجموع ریمان تعریف می‌شوند که به انتگرال معین منجر
می‌شود و می‌توان با پیدا کردن ضدمشتق تابع انتگرال‌دهنده، آن‌ها را
محاسبه کرد. بعد از تعریف و بیان توابع متعالی و ویژگی‌های آن‌ها
معادلات دیفرانسیل مرتبه اول پیچیده‌تری را حل می‌کنیم.

معادلات دیفرانسیل: بعضی از دانشگاه‌ها ترجیح می‌دهند که این درس
را به صورت جدای از حساب دیفرانسیل و انتگرال بیان کنند. اگر

فهرست مطالب

پرسش‌هایی هدفمند برای بازخوانی درس	۱
تمرین‌های مهارتی	۱۴
تمرین‌های پیشرفته و تکمیلی	۱۵

فصل ۱۴: مشتقات جزئی

۱.۱۴ توابع چند متغیره	۱
۲.۱۴ حد و پیوستگی در ابعاد بالاتر	۲
۳.۱۴ مشتقات جزئی	۳
۴.۱۴ قاعده زنجیره‌ای	۴
۵.۱۴ مشتقات جهتی و بردارهای گرادیان	۵
۶.۱۴ دیفرانسیل‌ها و صفحات مماس	۶
۷.۱۴ مقادیر فرینه و نقاط زینی	۷
۸.۱۴ ضرایب لاگرانژ	۸
۹.۱۴ فرمول تیلور دو متغیره	۹
۱۰.۱۴ مشتقات جزئی با متغیرهای مقید	۱۰
پرسش‌هایی هدفمند برای بازخوانی درس	۱۱
تمرین‌های مهارتی	۱۲
تمرین‌های پیشرفته و تکمیلی	۱۳

فصل ۱۵: انتگرال‌های دوگانه

۱.۱۵ انتگرال‌های دوگانه و مکرر روی مستطیل‌ها	۱
۲.۱۵ انتگرال‌های دوگانه روی نواحی معمولی	۲
۳.۱۵ محاسبه مساحت با انتگرال دوگانه	۳
۴.۱۵ انتگرال دوگانه در مختصات قطبی	۴
۵.۱۵ انتگرال‌های سه‌گانه در مختصات دکارتی	۵
۶.۱۵ گشتاورها و مرکز جرم	۶
۷.۱۵ انتگرال‌های سه‌گانه در مختصات استوانه‌ای و کروی	۷
۸.۱۵ جایگزین‌ها در انتگرال‌های چندگانه	۸
پرسش‌هایی هدفمند برای بازخوانی درس	۹
تمرین‌های مهارتی	۱۰
تمرین‌های پیشرفته و تکمیلی	۱۱

I

IV

فهرست عناوین کتاب

صل ۱۱: معادلات پارامتری و مختصات قطبی

۱.۱۱ پارامتری کردن منحنی‌های در صفحه	۱
۲.۱۱ حساب دیفرانسیل و انتگرال منحنی‌های پارامتری	۲
۳.۱۱ مختصات قطبی	۳
۴.۱۱ رسم نمودار در مختصات قطبی	۴
۵.۱۱ مساحت و طول منحنی در مختصات قطبی	۵
۶.۱۱ مقاطع مخروطی	۶
۷.۱۱ معادلات قطبی مخروطی‌ها	۷
پرسش‌هایی هدفمند برای بازخوانی درس	۸
تمرین‌های مهارتی	۹
تمرین‌های پیشرفته و تکمیلی	۱۰

۴۷

صل ۱۲: بردارها و هندسه فضایی

۱.۱۲ دستگاه‌های مختصات سه بعدی	۴۷
۲.۱۲ بردارها	۵۲
۳.۱۲ ضرب نقطه‌ای	۶۰
۴.۱۲ ضرب برداری	۶۶
۵.۱۲ خطوط و صفحات در فضا	۷۱
۶.۱۲ رویه‌های درجه دوم و استوانه‌ای	۷۸
پرسش‌هایی هدفمند برای بازخوانی درس	۸۳
تمرین‌های مهارتی	۸۴
تمرین‌های پیشرفته و تکمیلی	۸۶

۹۱

صل ۱۳: توابع مقدار برداری و حرکت در فضا

۱.۱۳ منحنی‌ها در فضا و مماس بر منحنی‌ها	۹۱
۲.۱۳ انتگرال توابع برداری، حرکت پرتابه	۹۸
۳.۱۳ طول کمان در فضا	۱۰۶
۴.۱۳ انحنا و بردارهای قائم یک منحنی	۱۱۰
۵.۱۳ مؤلفه‌های مماسی و قائم بردار شتاب	۱۱۵
۶.۱۳ سرعت و شتاب در مختصات قطبی	۱۱۹

پروردگار یکتا را سپاس و ستایش می‌کنیم که بار دیگر توفیق خدمت بیشتری به ما عنایت کرد تا آخرین ویرایش کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال توماس را به فارسی برگردانده و به همکاران و دانشجویان عزیز تقدیم کنیم. بدون شک هر کسی که با القای ریاضی آشنا باشد با نام جورج - ب - توماس، استاد ریاضی مؤسسه تکنولوژی ماساچوست *M.I.T* آشناست و آثار او را می‌شناسد که فاخرترین اثرش اکنون پیش روی شما قرار دارد.

این کتاب هم‌اکنون به عنوان کتاب اصلی دروس ریاضیات عمومی برای رشته‌های فنی و مهندسی - ریاضی - فیزیک و شیمی انتخاب تدریس می‌شود. یکی از ویژگی‌های برجسته این کتاب که تمایز آن بقیه کتاب‌های هم‌عنوانش نیز محسوب می‌شود تلفیق کاربرد مفاهیم ریاضی است تا دانشجو پس از گذراندن این دروس ریاضی بتواند مسایل کاربردی رشته تخصصی‌اش را حل کند. کوشیده‌ایم واژه‌های مرکز نشر برای واژه‌های کتاب استفاده کنیم.

بدون شک افراد زیادی در تهیه و تولید این اثر سهیم هستند. همین‌جا بایستی از مدیریت انتشارات پویش اندیشه جناب آقای میرزاشرانی تشکر و قدردانی کنیم.

از سرکار خانم‌ها بتول حیدری و خدیجه حیدری برای صبر حاصله در تایپ، صفحه‌آرایی و اسکن تصاویر تشکر می‌کنیم. پس از ۵ بار غلط‌گیری انجام شده است ولی شاید باز هم اشتباه وجود داشته باشد، خوشحال می‌شویم که این اشتباهات را پست الکترونیک Poyesh.andishe@gmail.com یا Poyesh_andishe43@yahoo.com بفرستید.

در پایان خواهشمندیم که دانشجویان عزیز به هیچ وجه این اجازه به دیگران ندهند که از روی کتاب نسخه‌برداری کرده و زحمات افر زیادی که در بالا به نامشان اشاره شد توسط دزدان علم به هدر رود. آرزوی موفقیت و شادکامی برای همه همکاران و دانشجویان عزیز داریم و امیدوارم با این اثر روح تازه‌ای به دروس ریاضی عمده دانشگاهی دمیده شود.

خدایا چنان کن سرانجام کار

تو خشنود باشی و ما رستگار

محمد تقی خادمی - احمد مجلس

د و کمتر جنبه رسمی داشته باشد تا درک مفاهیم دقیق ریاضی دانشجویان آسان‌تر شود. مفاهیم عمیق‌تر را به یک درس سرشته‌تر واگذار کرده‌ایم. سازمان‌دهی و تفاوت بین مباحث رسمی و رسمی به معلمین این آزادی را می‌دهد که مقدار و عمق مباحث ناگون را انتخاب کنند. مثلاً اگر چه قضیه مقدار میانی یا قضیه دار فرینه برای توابع پیوسته روی بازه $a \leq x \leq b$ را ثابت نمی‌کنیم، این قضایا را به دقت بیان می‌کنیم و آن‌ها را در مثال‌های مشهوری ح می‌دهیم و از آن‌ها برای اثبات نتایج مهم استفاده می‌کنیم. به او برای معلمینی که مایلند مفاهیم را عمیق‌تر آموزش دهند، در ست ۶، پیرامون درستی این قضیه‌ها و اصل موضوع کمال در اعداد یقی بحث کرده‌ایم.

نتن تمرین‌ها: در سراسر کتاب از دانشجویان خواسته شده است با نوشتن تمرین‌ها، مفاهیم و کاربردهای حسابان را درک و کشف کنند. به علاوه پایان هر فصل شامل فهرستی از پرسش‌های هدفمند ی دانشجویانی است که می‌خواهند درس را مرور و باطلون خلاصه را بیاموزند. در بسیاری از این تمرین‌ها خواسته شده است که ب تمرین را بنویسید.

نامه‌ها و پرسش‌های مروری پایان فصل: علاوه بر مسایلی که در ان هر بخشی وجود دارد، در پایان هر فصل، پرسش‌هایی برای مرور مل و تمرین‌های مهارتی که همه مباحث فصل را می‌پوشاند و یک ی تمرین‌های پیشرفته و تکمیلی که مسایلی مبارزطلب و یا مسایل س می‌هستند، آورده شده است. در اغلب فصل‌ها، برنامه‌های کاربرد آوری توصیف شده است که می‌تواند توسط گروهی از دانشجویان یا ک بازه زمانی طولانی‌تر حل شود. در این برنامه‌ها حتماً باید از م‌افزارهای میپل یا ممتیکا استفاده شود.

آوری: مباحثی که در این کتاب بیان شده‌اند، مطابق با سلیقه رس می‌تواند با فن آوری همراه شود. هر بخش شامل تمرین‌هایی ت که حل آن‌ها مستلزم استفاده از فن آوری است. اگر ماشین ساب یا رایانه برای حل آن‌ها مناسب باشد آن‌ها را با نماد $[T]$ شخص کرده‌ایم. اگر یک دستگاه جبری رایانه‌ای *CAS* (مثل میپل ممتیکا) برای حل آن‌ها لازم باشد با برجسب کاوش‌های رایانه‌ای شخص شده‌اند.

۲۶۹	۱.۱۶ انتگرال های خمیده خطی
	۲.۱۶ انتگرال های خمیده خطی و میدان های بردار:
۲۷۵	کار، گردش و شارش
	۳.۱۶ مستقل از مسیری، میدان های پایستار
۲۸۶	و توابع پتانسیل
۲۹۴	۴.۱۶ قضیه گرین در صفحه
۳۰۴	۵.۱۶ مساحت و رویه
۳۱۳	۶.۱۶ انتگرال روی رویه
۳۲۱	۷.۱۶ قضیه استوکس
۳۲۹	۸.۱۶ قضیه دیورژانس و نظریه همسانی
۳۳۸	پرسش هایی هدفمند برای بازخوانی درس
۳۳۹	تمرین های مهارتی
۳۴۲	تمرین های پیشرفته و تکمیلی

۳۴۵	پیوست ۸: قانون پخشی برای ضرب خارجی بردارها
۳۴۶	پیوست ۹: قضیه مشتق مخلوط و قضیه نمو